ENTWICKLUNG UND STABILITÄT EXTRAGALAKTISCHER PLASMASYSTEME

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Kurt Zegenhagen

aus Friedeberg/Neumark

1969

Druck:

ERNST-REUTER-GESELLSCHAFT
der Förderer und Freunde der Freien Universität Berlin e.V.

DISSERTATIONS-DRUCKSTELLE

1 Berlin 33, Garystr. 45

ENTWICKLUNG UND STABILITÄT EXTRAGALAKTISCHER PLASMASYSTEME

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Kurt Zegenhagen

aus Friedeberg/Neumark

1. Referent: Professor Dr. F. Hinderer

2. Referent: Professor Dr. H. Fortak

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 27. 1. 1969

Tag der Promotion: 28. APR. 1969

Zusammenfassung

Nach einer kurzen Einleitung,die der Begründung zu diesem Thema dient,werden die allgemeinen Voraussetzungen aufgeführt.Insbesondere verweise ich auf das von mir verwendete Modell der Urknallhypothese,und,daß das zu untersuchende Plasma als von mittlerer Dichte entsprechend einer Klassifikation von H.Alfvén anzusehen ist.Während mir die Urknallhypothese die später zu verwendenden Anfangsbedingungen bezüglich der Dichte und räumlichen Abmessungen zu berechnen gestattet,vereinfacht die Klassifikation des Plasmas das Magnetohydrodynamische Gleichungssytem.Die über dieses Gleichungssystem zu untersuchende Stabilität wird über den Stabilitätsbegriff nach Ljapunov mit den Routh-Hurwitz Determinanten durchgeführt.Angenommen wird in allen Fällen eine periodische Störung erster Ordnung.

Zunächst untersuche ich unter Berücksichtigung der Viskosität und der differentiellen Rotation unter Vernachlässigung des Einflusses eines Magnetfeldes die Stabilität eines Plasmas.Es erweist sich hierbei ein Bereich im Übergangsgebiet zur äußeren Hülle des Plasmasystems als instabil.Zur Begründung dieser Instabilität kann gezeigt werden,daß in diesem Gebiet die Überschallströmung ihren größten Betrag erreicht.
Bei der Untersuchung der Stabilität eines Plasmas mit einem sich spiralförmig öffnendem Magnetfeld ergibt sich eine generelle Instabilität des gesamten Plasmas bei radialer Strukturierung bezüglich des Instabilitätsverhaltens.Der Einfluß auf diese Strukturierung durch die auftretenden magnetischen Kräfte wird aufgezeigt.Es erweist sich insbesondere die magnetische Kraftkomponente in Achsrichtung als dominierend und verantwortlich für eine Expansion bzw. Kontraktion des inneren Kerns des Plasmasystems.
Auf mögliche Ringstrukturen im Randgebiet des Plasmasystems durch eine z-Komponente des Magnetfeldes wird abschließend verwiesen.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung 4

2. Allgemeine Voraussetzungen 7

3. Magnetohydrodynamisches Gleichungssystem 15

4. Begriff der Stabilität nach Ljapunov 21

5. Stabilität von Plasmasystemen 22

6. Differentialgleichungssystem der Störungsgrößen 36

7. Stabilitätskriterien 41

8. Entwicklung des Universums bis zur Bildung neutralen Wasserstoffs 45

9. Instabilität während der 2.Phase 51

10. Entwicklung des Universums nach der 2.Phase 57

11. Entwicklung der Instabilitätsgebiete nach der 2.Phase 60

12. Einfluß eines Magnetfeldes auf die Entwicklung des Plasmasystems 78

13. Instabilität des Plasmas mit Magnetfeld 83

14. Instabilität bei schwach positiv differentiell rotierendem Kern 109

15. Instabilität bei schwach negativ differentiell rotierendem Kern 129

16. Instabilität bei stark negativ differentiell rotierendem Kern 136

Literaturverzeichnis 141

1.Einleitung

Angeregt durch das durch zahlreiche Beobachtungen gesicherte Ergebnis,daß extragalaktische Objekte bei der Identifizierung als Radioquellen fast immer als Doppelquellen auftreten,soll in dieser Arbeit versucht werden,einen Entwicklungsweg extragalaktischer Objekte aufzuzeigen,der zum Verständnis dieser Beobachtung beiträgt.
Ein typischer Vertreter einer Radiodoppelquelle ist Centaurus A (Figur 1) in einer Entfernung von 4,7 Mpc .Die äußere Radiokontur ist von Bolton und Clark (P.A.S.P.,72, 29,1960) und die Aufnahme mit der inneren Doppelquelle von Maltby (Nature,191,793,1961).Im Mittelpunkt dieser Radioquelle steht die EO - Galaxie NGC 5128 mit einem Absorptionsband.Die Drehachse liegt in der Richtung der Radioquellen.
Eng verknüpft mit der Deutung solch spezieller Beobachtungen wird von den verschiedensten Autoren eine allgemeine Theorie angestrebt,die auch extreme Objekte wie Quasars und Irreguläre Nebel einschließt.
Ein empirischer Deutungsversuch von Sir M.Ryle und M.S. Longair /1/ als Ansatz zu einer Theorie versteht den Zusammenhang zwischen den beobachtbaren Objekten als eine zeitliche Entwicklungsreihe,an deren Anfang Quasars stehen. Diese Quasars geben dann durch Explosion Anlaß zur Bildung der beobachtbaren Objekte.
In dieses Schema paßt auch die Ansicht von I.I.K.Pauliny-Toth und K.I.Kellermann /2/,daß sich Quasars und Radiodoppelquellen nur in der Frequenz ihrer Explosionen unterscheiden.
Wie recht deutlich von J.H.Piddington /3/,/4/,/5/ gezeigt wurde,müssen alle Überlegungen in diesem Zusammenhang von der Existenz eines Magnetfeldes ausgehen. J.H.Piddington deutet dann die auftretenden extragalaktischen Objekte als das Ergebnis einer speziellen Stellung des Magnetfeldvektors und des Drehvektors zueinander.Diese Auffassung steht im Gegensatz zu dem Entwicklungsgedanken von Sir M.Ryle und M.S.Longair.

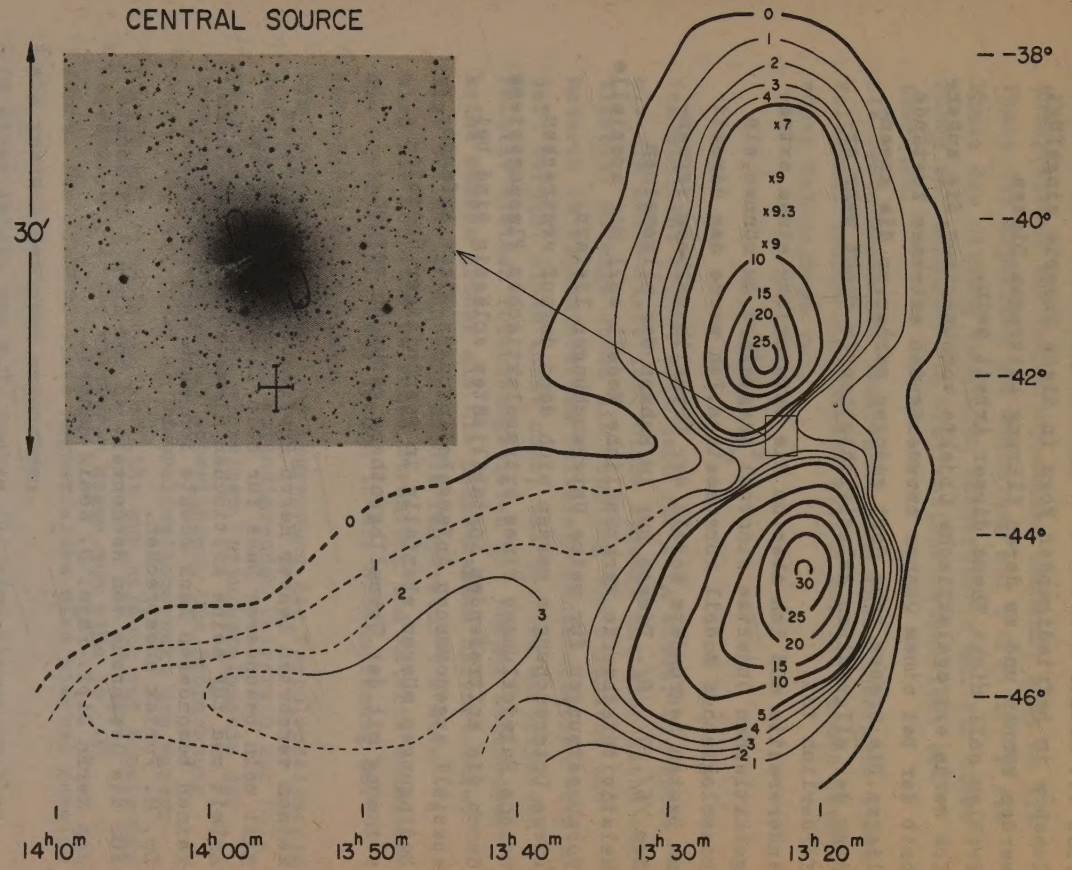


FIG. 1.—The radio source Centaurus A. The outer radio contours are taken from Bolton and Clark (*P.A.S.P.*, 72, 29, 1960). The model of the inner double source was determined by Maltby (*Nature*, 191, 793, 1961).

Für die Entscheidung zugunsten einer dieser beiden Theorien ist meiner Meinung nach ausschlaggebend, ob die Quasars in befriedigender Form in diese Theorie eingefügt werden können und zu deren Klärung beitragen. Dieses Problem soll nicht Thema dieser Arbeit sein.
Ich werde extragalaktische Objekte voraussetzen, die außerhalb der bei einem Quasar anzunehmenden extremen Zustände liegen. Die Grenze kann dort gezogen werden, wo die Anwendung der allgemeinen Relativitätstheorie nicht mehr erforderlich ist.
Andererseits muß ich aber, um die Entwicklung eines extragalaktischen Objektes sinnvoll darstellen zu können, ein kosmologisches Modell voraussetzen. Ich werde das derzeit am besten begründete Modell der Urknallhypothese verwenden /6/,/7/,/8/. Dieses nur im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie verständliche Modell soll mir spezielle Voraussetzungen für meine Untersuchungen liefern.
Diese Untersuchungen werden sich dann darauf erstrecken, welche Entwicklungen eines extragalaktischen Plasmasystems durch die auftretenden Instabilitäten zulässig sind bei speziell angenommenen Anfangsbedingungen. Diese Anfangsbedingungen müssen ebenfalls in vernünftiger Übereinstimmung mit der Urknallhypothese gefunden werden.

Meinem verehrten Lehrer Herrn Professor Dr. F. Hinderer gilt mein besonderer Dank für sein Interesse an dieser Arbeit und für seine kritischen Hinweise zu diesem Thema.
Meinen besonderen Dank möchte ich auch Herrn Professor Dr. H. Fortak aussprechen.
Für die Gewährung von Rechenzeit an der Zuse Z 23 möchte ich Herrn Dipl.-Phys. D. König danken.

2. Allgemeine Voraussetzungen

Entsprechend der Urknallhypothese schließt sich an die Phase der Expansion und Abkühlung auf $T \leq 4.1o^3\ ^oK$ die Phase der Bildung neutralen Wasserstoffs an. Für diese Phase sei zunächst die Gravitationsinstabilität betrachtet.

Als Jeans-Masse sei bezeichnet eine Masse innerhalb eines Volumens, dessen Durchmesser gleich der kritischen Jeansschen Wellenlänge ist.

$$M = \frac{\pi \cdot \rho}{6} \lambda_J^3 \qquad (1)$$

Instabilität ergibt sich dann für eine Masse, die größer als die Jeans-Masse ist. Diese Aussage hat aber keine Gültigkeit, solange durch die Kopplung von Strahlung und Materie im expandierendem Universum Kondensationen verhindert werden. Hinzu kommt noch, daß bei den auftretenden relativ kleinen Turbulenzgebieten mit kurzer Lebensdauer keine Massen größer als die Jeans-Massen hervortreten. Erst bei der Annäherung an die Temperatur $T = 4.1o^3\ ^oK$ wird die Kopplung zwischen Strahlung und Materie schwächer; die Turbulenzelemente kommen in die Größenordnung der Jeansschen Wellenlänge.

Die Entkopplung wird eine Abgrenzung der Turbulenzelemente gegenüber dem weiterhin expandierenden Universum zur Folge haben, da jetzt die einzelnen Turbulenzelemente der Gravitationsinstabilität unterliegen. Die Beobachtung zeigt nun, daß diese am Neutralisationspunkt des Wasserstoffs auftretende Instabilität zur Bildung von kosmischen Objekten mit einer mittleren Masse von etwa $1o^{11} \cdot M_\odot$ führt. Der Einfluß eines Magnetfeldes wird hierbei zumeist als vernachlässigbar angenommen.

In einer Arbeit von W.C. Saslaw /9/ wird dieses Problem der Gravitationsinstabilität untersucht.

Von Saslaw wird zunächst ausgeführt, daß für eine Gravitationsinstabilität zwei Ursachen in Betracht gezogen werden können.

1) Bei einem isotrop expandierendem Universum führen statistische Dichteschwankungen zu einem Mechanismus anwachsender Kondensation.
   Es hat sich aber leider gezeigt, daß die vorauszusetzenden Dichteschwankungen als statistische Schwankungen zu groß sind, und somit dieser Mechanismus ausgeschlossen werden kann.
2) Diese Schwierigkeit führte zu der Annahme, daß das expandierende Universum Turbulenzen aufweist.
   Dies ist aber zunächst keine aus der Theorie zu folgernde zwingende Forderung. Diese ad hoc Annahme ist also auch nicht befriedigend.

Man kann nun aber auf aus dieser Theorie ableitbare Phasen zurückgreifen, die während der Expansion für die thermodynamischen Größen als kritisch zu bezeichnen sind. Zu untersuchen wäre also, ob Veränderungen der thermodynamischen Größen während dieser kritischen Phasen als Primärerscheinungen dann sekundär zu Gravitationsinstabilitäten führen können. Diese kritischen Phasen sind

1. Phase $T \sim 3 \cdot 10^9\ ^\circ K$
   Kernfusion. Bildung von Helium.
2. Phase $T \sim 4 \cdot 10^3\ ^\circ K$
   Bildung von neutralem Wasserstoff.

Die Untersuchung über das Verhalten von thermodynamischen Größen während beider Phasen konnte von Saslaw aber zu keinem befriedigendem Ergebnis geführt werden.
Das Ergebnis dieser Arbeit scheint mir aber dennoch zu sein, daß entscheidend gerade für die Bildung massereicher kosmischer Objekte die Gravitationsinstabilität ist. Ich werde daher meine Untersuchung auch nur auf diese erstrecken und eine evtl. thermodynamische Primärerscheinung nicht in die Untersuchung mit einbeziehen.
Da es sich bei den nachfolgenden Untersuchungen um in Magnetfelder eingebettete Plasmen handelt, soll im Rahmen der Urknallhypothese ein den Kosmos erfüllendes Magnetfeld angenommen werden. Über den Ursprung des Magnetfeldes kann keine befriedigende Antwort gegeben werden.
In einer Arbeit von K.S. Thorne /10/ wird aber gezeigt,

daß im Falle eines ursprünglichen Magnetfeldes das Universum in der relativistischen Urknalltheorie extrem anisotrop gewesen sein muß im Anbeginn der Expansion. Die heute zu beobachtende Isotropie ist damit nicht unvereinbar, da bei einer jetzt zu beobachtenden Magnetfeldstärke von 10^{-6} Gauß der Einfluß auf die Gesamtdynamik des Universums vernachlässigbar ist.
Zur weiteren Bearbeitung soll generell im zu betrachtenden Teilraum des Kosmos ein homogenes Magnetfeld während der 2. Phase angenommen werden.
In dem mit dem homogenen Magnetfeld erfüllten Teilraum gilt weiterhin die euklidische Metrik, wenn die nachfolgende Bedingung erfüllt ist.

$$\frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2 \cdot R} \ll 1 \qquad (2)$$

Da die zu untersuchenden kosmischen Objekte eine Masse haben sollen von $M \sim 1o^{11} \cdot M_\odot = 2 \cdot 1o^{44} g$, muß deren Ausdehnung zur Erfüllung der Bedingung (2) sein:

$$R \gg \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2} = 0{,}01 \text{ pc} . \qquad (3)$$

Diese Bedingung kann in dieser Arbeit erfüllt werden, womit eine euklidische Metrik dem jeweils betrachteten Teilraum zugrundegelegt werden kann.
Ich werde weiterhin folgende Annahme einführen:
Nach der 1. Phase und vor Beginn der 2. Phase treten großräumige Turbulenzelemente als Folge der Kernfusionen auf. Der Drehimpuls eines Turbulenzelementes summiert sich jeweils über eine Gruppe von Turbulenzelementen zum Gesamtdrehimpuls Null. Dies entspräche den späteren Galaxienhaufen wobei angenommen wird, daß eine Galaxie einem ursprünglichen Turbulenzelement entspricht. Der Beginn der zur Galaxie führenden Kontraktion des Turbulenzelementes geschieht während der 2. Phase.
Es sollen nun Abschätzungen über Temperatur, Dichte und Magnetfeldstärke der Turbulenzelemente gemacht werden, wie sie während der 2. Phase vorliegen.

Die Temperatur läßt sich aus folgender Überlegung gewinnen. Die Bildung kosmischer Nebel wird verursacht durch die Gravitationsinstabilität, die mit steigendem Anteil an neutralem Wasserstoff und der damit schwindenden Kopplung zwischen Strahlung und Materie an Einfluß gewinnt. Setzt man thermisches Gleichgewicht voraus, so wäre die Entkopplung für ein Wasserstoffplasma zu erwarten, wenn der Ionisierungsgrad auf etwa 0,01 abgesunken ist. Der Ionisationsgrad läßt sich aus der Saha-Gleichung /11/ berechnen.

$$\frac{n_i \cdot n_e}{n_H} = \frac{(2\pi \cdot m_e \cdot k \cdot T)^{3/2}}{h^3}\, e^{-\frac{\chi_o}{k \cdot T}} \qquad (4)$$

Bei Vernachlässigung des Heliumgehaltes und der schwereren Elemente gilt für den ionisierten Wasserstoff

$$n_i = n_e$$

und $\chi_o = 2{,}18 \cdot 10^{-11}$ erg.

Der Ionisationsgrad berechnet sich dann nach entsprechender Umstellung der Gleichung (16) aus

$$\alpha = \frac{n_i}{n_H} = \frac{}{\sqrt{1 + \frac{4 \cdot \rho}{m_H \cdot A}} - 1} \qquad (5)$$

mit $$A = \frac{(2\pi \cdot m_e \cdot k \cdot T)^{3/2}\, e^{-\frac{\chi_o}{kT}}}{h^3} \quad .$$

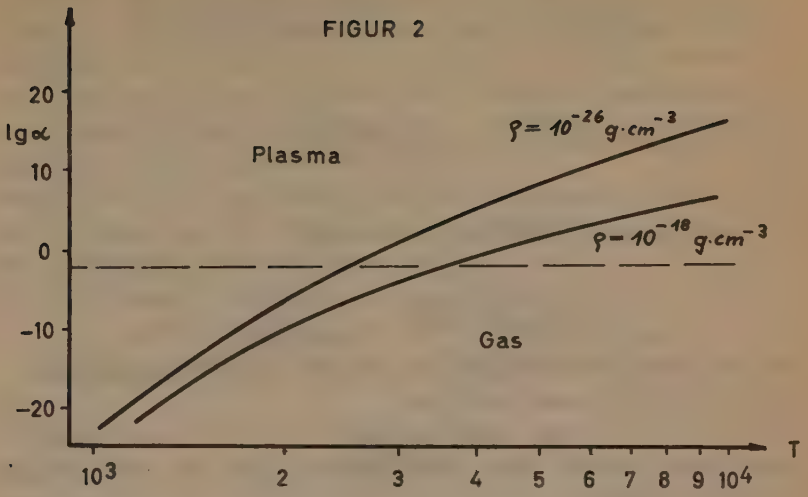
Gleichung 5 ist in der Figur 2 für zwei Dichten graphisch dargestellt. Dieser Figur entsprechend ergibt sich als Temperatur während der 2. Phase

$$T_o = 4 \cdot 10^3 \ ^oK \ . \qquad (6)$$

Im Rahmen der Expansionshypothese wird nach erfolgter Bildung des atomaren Wasserstoffs das Strahlungsfeld weiterhin adiabatisch expandieren bis zu dem heute isotrop zu beobachtenden Wert /6/ von $T_i = 3\ ^oK$. Das entspricht einem Gebietsexpansionsfaktor von

$$\frac{R_i}{R} < \left(\frac{T}{T_i}\right)^{1/2} = \left(\frac{4 \cdot 10^3}{3}\right)^{1/2} = 36{,}5 \ . \qquad (7)$$

FIGUR 2



Da die Randgebiete der Turbulenzelemente ebenfalls dieser Expansion unterliegen, kann die heutige Halogröße etwa mit dem R_i identifiziert werden. Bei einem mittleren R_i von 15 kpc ist dann $R > 1{,}27 \cdot 10^{21}$ cm entsprechend der Gleichung (7). Als Gesamtmasse war bereits angenommen $M = 2 \cdot 10^{44}$ g, so daß sich als mittlere Dichte für das Turbulenzelement während der 2. Phase ergibt:

$$\varrho = \frac{M}{V} < \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{44}}{4\pi \cdot 1{,}27^3 \cdot 10^{63}} = 2{,}3 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}.$$

Zu einem ähnlichen Ergebnis gelangt man, wenn man annimmt, daß die Strahlungsenergie zum Zeitpunkt der 2. Phase größer als die Gravitationsenergie ist. Der entsprechende Ansatz wäre (ohne Rotation):

$$\frac{8\pi^5 \cdot k^4 \cdot T^4}{15 \cdot c^2 \cdot h^3} V \gg \frac{G \cdot M^2}{R},$$

und damit mit den gleichen Werten für die Masse und die Temperatur wie oben:

$$R^4 \gg \frac{3 \cdot G \cdot M^2}{\frac{8\pi^5 \cdot k^4}{15 \cdot c^2 \cdot h^3} \cdot 4\pi T^4} = \frac{3 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot M^2}{7{,}57 \cdot 10^{-15} \cdot 4\pi \cdot T^4}$$

$$R \gg 38{,}1 \frac{\sqrt{M}}{T} = 1{,}3 \cdot 10^{20} \text{ cm}.$$

Die sich daraus ergebende Dichte ist

$$\rho = \frac{M}{V} \ll \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{44}}{4\pi \cdot 2{,}44 \cdot 10^{60}} = 1{,}96 \cdot 10^{-17} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}.$$

Es soll daher als mittlere Dichte des Turbulenzelementes während der 2. Phase der Wert

$$\rho = 10^{-20} \text{ g/cm}^3 \qquad (8)$$

angenommen werden. Die entsprechende Größe des Turbulenzgebietes sei dann

$$R = 10^{21} \text{ cm}. \qquad (9)$$

Die Stärke des Magnetfeldes soll folgendermaßen abgeschätzt werden. Während der 2. Phase soll die Magnetfeldenergie gegenüber der Gravitationsenergie vernachlässigbar sein.

$$\frac{G \cdot M^2}{R} \gg \frac{1}{6} R^3 B^2$$

Daraus folgt

$$B^2 \ll \frac{6 \cdot G \cdot M^2}{R^4} = \frac{6 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^{18}}{10^{84}} = 1{,}6 \cdot 10^{-2},$$

und somit als obere Grenze für die magnetische Feldstärke

$$B \ll 0{,}13 \text{ Gauß}.$$

Eine genauere Festlegung soll nicht vorgenommen werden. Im Verlaufe der späteren Rechnung wird für ein bestimmtes Entwicklungsstadium des kosmischen Objektes das Magnetfeld genauer festgelegt werden.

Nicht unerwähnt bleiben soll das Problem der Antimaterie in kosmischen Modellen. Im Zusammenhang mit einem expandierendem bzw. kontrahierendem Universum wird dieses

Problem von H. Alfvén /12/, /13/ diskutiert. Die Abgrenzung kosmischer Teilräume geschieht dort durch Grenzflächen, die Gebiete von Materie und Antimaterie trennen. Die Möglichkeit der Existenz von Materie und Antimaterie in einem galaktischen System wird nicht ausgeschlossen. Ich möchte für meine Untersuchungen diese letzte Möglichkeit aber nicht in Betracht ziehen.
Damit läßt sich nun eine Klassifikation des zu untersuchenden Plasmas nach H. Alfvén /14/ durchführen.
Der Larmorradius eines Elektrons ist /15/

$$r_L = \frac{m_e \cdot c \cdot \vec{v}_e \times \vec{B}}{e_0 \cdot B^2 \sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}} < \frac{m_e \cdot c \cdot v_e}{e_0 \cdot B \sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}}$$

Mit

$$v_e = \left(\frac{3 \cdot k \cdot T}{m_e} \right)^{1/2} \qquad (10)$$

ergibt sich

$$r_L < \frac{1{,}22 \cdot 10^{-2} \cdot T^{1/2}}{B \sqrt{1 - 5{,}08 \cdot 10^{-11} \cdot T}} \; .$$

Somit im betrachteten Temperaturbereich als Näherung:

$$r_L < 1{,}22 \cdot 10^{-2} \frac{T^{1/2}}{B} \; . \qquad (11)$$

Die Freie Weglänge ist weiterhin /14/

$$\lambda_e = \tau_{ee} \cdot v_e \qquad (12)$$

mit der Stoßzeit zweier Elektronen

$$\tau_{ee} = \frac{m_e^2 \left(\frac{3 \cdot k \cdot T}{m_e} \right)^{3/2}}{e_0^4 \cdot n_e \cdot 0{,}714 \cdot 8\pi \cdot \ln \Lambda} = 7{,}7 \cdot 10^{-3} \frac{T^{3/2}}{n_e} \; . \qquad (13)$$

Mit (10) und (13) folgt für (12) dann

$$\lambda_e = \frac{1{,}65 \cdot 10^3 \cdot T^2}{n_e} \; . \qquad (14)$$

Entsprechend der Annahme (8) ist

$$n_e \simeq n_p = \frac{\varrho}{m_p} = \frac{10^{-20}}{1{,}67 \cdot 10^{-24}} = 6 \cdot 10^3$$

Damit erhalte ich für (14)

$$\lambda_e = 0{,}27 \cdot T^2 \qquad (15)$$

und mit (6) für (15)

$$\lambda_e = 4{,}4 \cdot 10^6 \; . \qquad (16)$$

Weiterhin ergibt sich für (11)

$$r_L \leqslant \frac{0{,}77}{B} \qquad (17)$$

mit den Werten :

B [Gauß]	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
r_L [cm]	77	770	7700

Das später mit Magnetfeld zu untersuchende Plasma hat eine Magnetfeldsrärke von $B \gg 10^{-4}$ Gauß. Damit gilt im angegebenem Magnetfeldstärkebereich $\lambda_e \gg r_L$, und da zudem nach (9) $R = 10^{21}$ cm ist, d.h.

$$r_L \ll \lambda_e \ll R \; , \qquad (18)$$

entspricht das Plasma nach der Klassifikation von H. Alfvén /14/ einem Plasma mittlerer Dichte.
Für ein solches Plasma kann die elektrische Leitfähigkeit $\sigma \longrightarrow \infty$ gesetzt werden. Das elektrische Feld kann vernachlässigt werden, zumal infolge der Tendenz zu einem Plasma großer Dichte die Leitfähigkeit als praktisch isotrop anzusehen ist.
Untersuchungen über das dynamische Verhalten dieses Plasmas werden im Rahmen der Magnetogasdynamik durchgeführt. Grundlage für diese Untersuchungen ist das Magnetohydrodynamische Gleichungssystem, das im nächsten Kapitel angegeben werden soll.

3. Magnetohydrodynamisches Gleichungssystem

Zur Untersuchung von Problemen der Magnetogasdynamik ist folgendes Gleichungssystem erforderlich:

a) die Bewegungsgleichung,
b) die Maxwellschen Gleichungen,
c) der Massenerhaltungssatz und die Gravitationsgleichung,
d) die Zustandsgleichung und die Wärmeleitungsgleichung

1) Die Bewegungsgleichung

Ich gehe aus von der Navier-Stokeschen Gleichung

$$\rho \frac{d}{dt} \vec{v} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \rho \vec{v} \cdot (\nabla \vec{v}) = \rho \vec{k} + \nabla \cdot \mathbf{T} . \quad (19)$$

Hierin entspricht $\vec{k}$ den äußeren Volumenkräften und $\nabla \cdot \mathbf{T}$ den auftretenden inneren Volumenkräften. $\mathbf{T}$ ist der Spannungstensor und $\nabla \vec{v}$ der Tensor der Verschiebungsgeschwindigkeit.

$$\nabla \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Der auftretende Spannungstensor läßt sich in zwei Anteile zerlegen. In einen Anteil, der den inneren Volumenkräften bei ruhendem Plasma entspricht und in einen Anteil, der als Reibungstensor $\mathbf{F}$ dem bewegten Plasma entspricht.

$$\mathbf{T} = \mathbf{F} - p \mathbf{E}$$

$\mathbf{E}$ ist der Einheitstensor.

Nach dem Navier-Stokeschen Reibungsansatz ist

$$\mathbf{F} = 2\mu \left(\mathbf{D} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \mathbf{E} \right) .$$

Hierin ist μ die dynamische Zähigkeit und $\mathbf{D}$ der Deformationstensor.

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich damit für die inneren Volumenkräfte

$$\nabla \cdot \mathbb{T} = \nabla \cdot \mathbb{F} - \nabla \cdot (p\mathbb{E}) - \mu \Delta \vec{v} + \frac{1}{3}\mu \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla p . \qquad (20)$$

Da nun weiterhin gilt

$$\vec{v} \cdot (\nabla \vec{v}) = \frac{1}{2} \nabla \vec{v}^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) , \qquad (21)$$

wie sich durch Ausrechnen leicht bestätigen läßt, ergibt sich für die Navier-Stokesche Bewegungsgleichung (19) zusammen mit (20) und(21)

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \nabla \vec{v}^2 - \rho \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \rho \vec{k} - \nabla p + \frac{1}{3}\mu \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) + \mu \Delta \vec{v} . \qquad (22)$$

Diese Gleichung gilt für ein kompressibles, viskoses, nichtrelativistisches Plasma.
Die Kompressibilität drückt sich aus in

$$\nabla \cdot \vec{v} \neq 0 .$$

Der Einfluß einer Turbulenz läßt sich erkennen, wenn man den dritten Term auf der rechten Seite der Gleichung (22) umformt.

$$\frac{1}{3}\mu \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) = \frac{1}{3}\mu \Delta \vec{v} + \frac{1}{3}\mu \nabla \times (\nabla \times \vec{v})$$

Im Falle einer Turbulenz ist

$$\nabla \times \vec{v} \neq 0 .$$

Als wirksame äußere Volumenkräfte lassen sich folgende angeben.
Da das Magnetfeld in einem Plasma eingefroren ist, was einer unendlich großen elektrischen Leitfähigkeit des Plasmas entspricht, kann das Magnetfeld als ein äußeres angesehen werden. Dies trifft um so mehr zu, als die Rückwirkung des Plasmas auf dieses Magnetfeld sehr gering ist. Die äußere elektromagnetische Kraft ist damit

$$\vec{k}_1 = \frac{1}{4\pi\rho}\,(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}\,. \tag{23}$$

Infolge der Eigengravitation wirkt weiterhin die durch ein Potential darstellbare Gravitationskraft.

$$\vec{k}_2 = -\nabla\phi \tag{24}$$

Zusammenfassend ergibt sich damit für (22) mit (23) und (24) als Navier-Stokesche Gleichung:

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \phi\right) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})\right) = \\ = -\nabla p + \frac{1}{3}\mu\nabla(\nabla\cdot\vec{v}) + \mu\Delta\vec{v} + \frac{1}{4\pi}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}. \tag{25}$$

---

2) Die Maxwellschen Gleichungen
Das System der Maxwellschen Gleichungen lautet:

$$\begin{aligned} \nabla\times\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{H} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B} &= 0 \\ \nabla\cdot\vec{E} &= 4\pi\rho_c \end{aligned} \tag{26}$$

$\vec{E}$: elektrische Feldstärke
$\vec{B}$: magnetische Induktion
$\vec{D}$: dielektrische Verschiebung
$\vec{H}$: magnetische Feldstärke
ρ_c: räumliche Ladungsdichte.

Der Stromdichtevektor $\vec{j}$ lautet bei einem vollständig ionisiertem Plasma

$$\vec{j} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right). \qquad (27)$$

Zur Lösung des Maxwellschen Gleichungssystems benötigt man noch folgende Gleichungen:

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \qquad \vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \; .$$

Für ein Plasma ist praktisch: $\mu = 1$ und $\varepsilon = 1$.
Damit erhalte ich für das Gleichungssystem (26)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (28)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (29)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (30)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho_e \; . \qquad (31)$$

Fasse ich (28) und (27) zusammen

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{j}}{c} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (32)$$

und beachte, daß im zu betrachtenden Plasma der Verschiebungsstrom vernachlässigt werden kann

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \; , \qquad (33)$$

so ergibt sich bei Zusammenfassung von (32) und (33) die Gleichung

$$\nabla \times \left(\frac{c}{4\pi\sigma} \nabla \times \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \; .$$

Daraus erhält man

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \nabla \times \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla \times \vec{B} \right). \qquad (34)$$

Man bezeichnet $\frac{c^2}{4\pi\sigma} = \nu_m$ als magnetische Viskosität.
Das unter kosmischen Bedingungen zu untersuchende Plasma

hat aber eine unendlich große Leitfähigkeit. Damit ergibt sich für (34) die Gleichung

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) . \qquad (35)$$

Nach Alfvén /14/ ist somit das Magnetfeld in das Plasma "eingefroren" und wird mit diesem mitbewegt.

---

3) Massenerhaltungssatz und Gravitationsgleichung
Der Massenerhaltungssatz soll in folgender Form verwendet werden

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \qquad (36)$$

Die Gravitationsgleichung lautet

$$\Delta \phi = 4\pi G \rho . \qquad (37)$$

Hierin ist ϕ das Gravitationspotential und G die Gravitationskonstante. Die Gravitationskonstante werde ich als zeitlich konstant annehmen.
Der von P.A.M. Dirac angenommenen zeitlichen Abnahme der Gravitationskonstanten werde ich also nicht folgen, auch wenn sie nicht ganz unbegründet erscheint /16/, /17/, /18/.

---

4) Zustandsgleichung und Wärmeleitungsgleichung
Das Plasma kann als ein ideales Gas betrachtet werden. Demzufolge gilt

$$p = \frac{R \cdot T}{\mu} \rho . \qquad (38)$$

Hierin ist T die Temperatur, R die Gaskonstante und μ das Molekulargewicht des Plasmas.
Ferner ist bei den Untersuchungen die Wärmeleitung zu berücksichtigen. Sie soll zur Abschätzung der Temperaturschichtung dienen.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right) T(\vec{r},t) = -\frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) T(\vec{r},t) + \frac{2\kappa}{3\rho} \Delta T(\vec{r},t) + f \qquad (39)$$

Hierin ist κ die thermische Leitfähigkeit. Die Funktion

f entspricht der Wärmeproduktion bzw. dem Wärmeverlust des Plasmas, resultierend aus folgenden Prozessen:

1) Joulesche Dissipation
2) mechanische Dissipation
3) Strahlungserwärmung
4) Strahlungsverluste (Bremsstrahlung, Zyklotronstrahlung)
5) Turbulenz
6) Teilchenverluste.

Das magnetohydrodynamische Gleichungssystem läßt sich nur unter sehr speziellen Bedingungen lösen. Solche Bedingungen können hier nicht vorausgesetzt werden.
Die zur Untersuchung der Entwicklung des Plasmasystems erforderlichen Lösungen als Funktion der Zeit können somit nicht angegeben werden. Um dennoch die Entwicklung beurteilen zu können, untersuche ich die Stabilität des magnetohydrodynamischen Gleichungssystems. Die Voraussetzungen zu jeder angenommenen Entwicklungsphase bedürfen dann aber einer eingehenden Begründung.

4. Begriff der Stabilität nach Ljapunov /19/

Die Komponenten $y_i(t)$ eines Lösungsvektors $\vec{y}(t)$ des Gleichungssystems sollen stetig von gewissen Parametern $a = (a_1, a_2, \ldots)$ abhängen.
Es sei dann $\vec{a}_o$ ein fester Punkt im Parameterraum, wobei der variable Punkt $\vec{a}$ zur Umgebung U von $\vec{a}_o$ gehöre.
Dann sei $\vec{y}(t, \vec{a}_o)$ der ungestörte Vektor und
$\vec{y}(t, \vec{a})$ der gestörte Vektor.

Definition:

Der gestörte Vektor heißt stabil in Bezug auf U und einen Anfangszeitpunkt t_o, wenn sich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart angeben läßt, daß aus der Ungleichung

$$\left|\vec{y}(t_o, \vec{a}_o) - \vec{y}(t_o, \vec{a})\right| < \delta(\varepsilon, t_o)$$

die Ungleichung

$$\left|\vec{y}(t, \vec{a}_o) - \vec{y}(t, \vec{a})\right| < \varepsilon \qquad t > t_o$$

folgt.
Instabil heißt der Vektor, wenn bei festem $\varepsilon > 0$

$$\left|\vec{y}(t, \vec{a}_o) - \vec{y}(t, \vec{a})\right| > \varepsilon$$

ist, obwohl

$$\left|\vec{y}(t_o, \vec{a}_o) - \vec{y}(t_o, \vec{a})\right| < \delta .$$

Betrachte ich eine periodische Störung

$$\vec{y}(t, \vec{a}) = \vec{y}(t, \vec{a}_o) + \vec{\eta}(t_o, \vec{a}_o) \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

wobei $\left|y(t_o, a_o)\right| \gg \left|\vec{\eta}(t_o, a_o)\right|$ ist,

so bedeutet das, daß bei komplexem ω der $\mathrm{Im}(\omega)$ positiv sein muß.

STABILITÄT: $\mathrm{Im}(\omega) > 0$ (40)

Bei Stabilitätsproblemen sind die zu untersuchenden Größen im allgemeinen reell. Die Definitionen bleiben aber auch gültig, wenn die Ausgangsgleichungen komplex sind, sofern nur die unabhängige Variable t reell bleibt. Nach Aufspaltung der Gleichungen in Realteil und Imaginärteil kann man dann den komplexen Fall stets auf den reellen zurückführen.

5. Stabilität von Plasmasystemen

In diesem Kapitel soll über bereits durchgeführte Arbeiten zur Frage der Stabilität gravitierender Plasmasysteme berichtet werden.
Grundlegend für die Untersuchung der Stabilität von Nebeln war die Arbeit von Sir J. Jeans /20/. Er zeigte, daß für einen Nebel die kritische Wellenlänge (Jeanssche Wellenlänge) lautet

$$\lambda_J^2 = \frac{\pi}{G \cdot \rho} \frac{dp}{d\rho} \quad . \qquad (41)$$

Für ein $\lambda > \lambda_J$ tritt Instabilität auf. Die Untersuchung erstreckte sich auf Bereiche, in denen

$$\frac{dp}{d\rho} = a^2 = const.$$

sein soll, wobei a die Schallgeschwindigkeit im Nebel ist.
In einer Arbeit von P.A. Strittmatter /21/ wird für einen Nebel, der in ein Magnetfeld eingebettet ist, gezeigt, daß für Schallmoden, deren Ausbreitung parallel zu den Magnetfeldlinien erfolgt, das Jeanssche Stabilitätskriterium (41) erhalten bleibt. Für Schallmoden, deren Ausbreitung senkrecht zum Magnetfeld erfolgt, gilt dagegen folgendes Stabilitätskriterium:

$$\lambda^2 < \lambda_H^2 - \lambda_J^2 \left(1 + \frac{v_A^2}{a^2}\right) . \qquad (42)$$

Hierbei ist v_A die Alfvén-Geschwindigkeit im Medium.

$$v_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad . \qquad (43)$$

In dieser Arbeit wird auch die Bedeutung der zur Instabilität führenden Moden abgeschätzt, und deren Anwendung auf Fragen der Bildung kosmischer Nebel diskutiert. In diesem Zusammenhang erhält Strittmatter das Ergebnis, daß eine Gravitationskontraktion nicht möglich ist für eine Masse

$$M < \rho \cdot \lambda_J \cdot \lambda_H^2$$

(außer bei $\lambda_H \approx \lambda_J$). Eine Kontraktion, die zur Bildung

eines Nebels führt, kann erst auftreten für

$$M > \rho \cdot \lambda_H^3 .$$

Der Einfluß des Magnetfeldes auf die Gravitationsinstabilität eines kosmischen Nebels mit eingefrorenem Magnetfeld wird ebenfalls von P.A. Strittmatter /22/ untersucht. Wie man aus (42) erkennt, tritt Instabilität parallel zum Feld bevorzugt auf. Bei einer Kontraktion quer zum Feld können die Gravitationskräfte nur langsam gegenüber den magnetischen Kräften zur Auswirkung gelangen. Dies auch nur deshalb, weil durch Kontraktion der kosmische Nebel von einer quasisphärischen Gestalt zu einem flachen Nebel längs des Magnetfeldes abflacht. Da hierbei aufgrund des eingefrorenen Magnetfeldes der magnetische Fluß konstant bleibt, wird die kritische Masse, unterhalb der eine Kontraktion quer zum Feld durch magnetische Kräfte verhindert wird, auf die Hälfte reduziert. Erst dies macht mit fortschreitender Abflachung eine Kontraktion quer zum Feld möglich. Das kritische Magnetfeld, das eine Kontraktion verhindert, ist

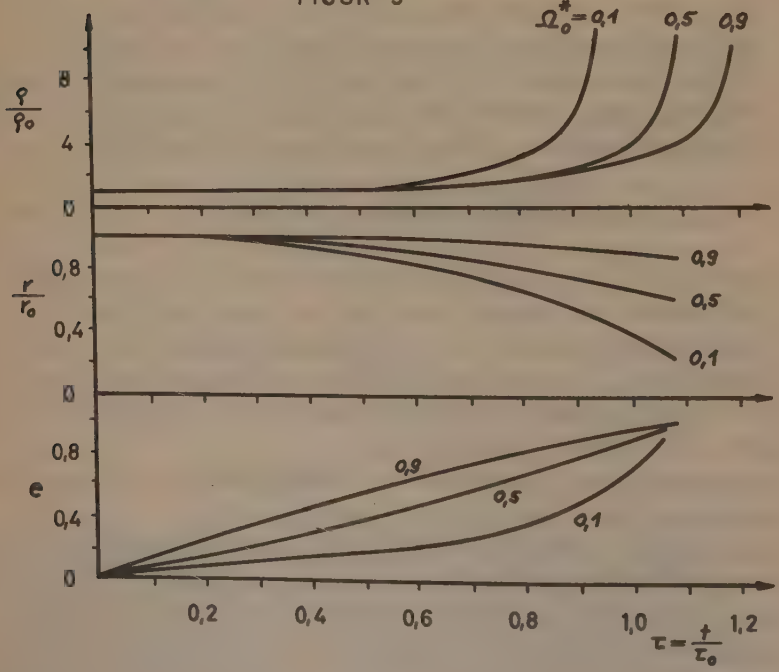
$$B_c = \sqrt{\frac{16\pi^2}{9}} \sqrt{\frac{12G}{5}} \cdot \rho^{2/3} \cdot M^{1/3} . \qquad (44)$$

Für $B_c < B < 2 \cdot B_c$ kann die Kontraktion erst nach erfolgter Abflachung eintreten. Nimmt man ein ins Unendliche verlaufende Magnetfeld an, so wird das Ergebnis (44) insofern abgewandelt, als der Kollaps quer zum Magnetfeld durch $B > 1{,}67 \cdot B_c$ verhindert wird, und die Kontraktion bereits bei $B < 0{,}83 \cdot B_c$ eintreten kann.
Berücksichtigt man ferner den thermischen Druck und eine Rotation, dann ergibt sich folgendes Bild.
Ein großer thermischer Druck verhindert den Gravitationskollaps. Kann der Kollaps anisotrop beginnen, verursacht durch Rotation und starkes Magnetfeld, so hat der thermische Druck eine mit fortschreitendem Kollaps zunehmende Bedeutung. Der Nebel würde dann in Richtung des Magnetfeldes bis auf eine Dicke $\tilde{z}$ zusammenfallen, wenn Magnetfeld und Drehachse parallel stehen.

$$\tilde{z} = 1{,}4 \cdot 10^7 \left(\frac{T}{\rho}\right)^{1/2}$$

Stehen Magnetfeld und Drehachse nicht parallel, so werden auch bei schwachem Anfangsmagnetfeld die magnetischen Kräfte den Gravitationskräften bei einem Kollaps quer zum Magnetfeld im Verlaufe des Kollapses entgegenwirken können und ihn zum Stillstand bringen. Es erfolgt somit ebenfalls Abflachung in Richtung des Magnetfeldes.
Der Einfluß der Rotation wird unter Vernachlässigung des thermischen Druckes und eines Magnetfeldes untersucht von T.T. Arny /23/. Bei einem ungestörten Kollaps ergibt sich durch Rotationseinfluß der in der Figur 3 dargestellte zeitliche Verlauf.

FIGUR 3



Hierin ist

r: Äquatorialradius
ρ: mittlere Dichte
e: Exzentrizität.

Der Index "o" kennzeichnet den Anfangswert zur Zeit t = 0. Weiterhin ist

$$\tau = \frac{t}{t_0} = \frac{t}{\sqrt{\frac{4\pi}{3} G \rho_0}}$$

und $\Omega^* = \Omega \cdot \tau_0$ mit Ω = Winkelgeschwindigkeit. Diese Betrachtung, die praktisch den freien Fall der am Kollaps beteiligten Teilchen beschreibt, gibt recht anschaulich den Einfluß der Rotation wieder. Hierbei erweist sich die Rotation als Ursache der Abflachung. Es zeigt sich weiterhin, daß die mittlere Dichte mit zunehmender Rotation langsamer ansteigt als bei sphärischem Kollaps.
Nicht unerwähnt bleibt auch, daß bei einem asphärischem Anfangszustand auch ohne Rotation eine Abflachung eintreten kann.
Die lineare Störungstheorie für den oben betrachteten Kollaps ergibt, daß die Kontrastdichte folgender Gleichung genügt:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \tau \frac{d\varepsilon_0}{dt} + \left(\frac{3}{2} - \Omega_0^* \frac{\nu_0}{\varepsilon_0} \right) \varepsilon_0 \cdot \tau^2 ,$$

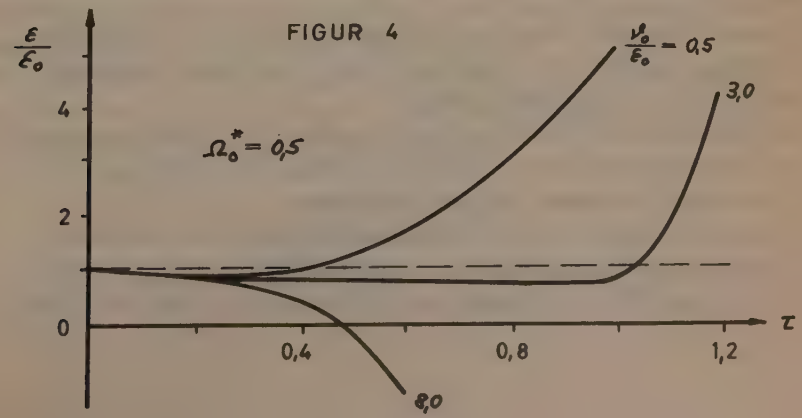
wobei $\dot{x}_0 = \dot{z}_0 = 0$, und
$\nu = \tau_0 \cdot \mathrm{rot}_z U$ U: Störungsgeschwindigkeit.

Die Störung kann somit nur anwachsen, wenn

$$\Omega_0^* \frac{\nu_0}{\varepsilon_0} < \frac{3}{2} .$$

Dieses Ergebnis ist auch in der Figur 4 zu erkennen.

FIGUR 4



Es zeigt sich, daß mit wachsender Rotation Störungseinflüsse abgeschwächt werden und eine Fragmentierung im Verlaufe des Kollapses verhindert wird. Diese Betrachtung ist insofern von Bedeutung, als im Anfangszustand der Kontraktion eines Nebels das Magnetfeld eine untergeordnete Rolle spielt. Im Verlaufe der fortschreitenden Kontraktion wird das Magnetfeld einen stärkeren Einfluß erhalten.
J.L. Tassoul /24/ untersuchte diese Frage für eine gravitierende inkompressible Scheibe endlicher Dicke. Es zeigte sich, daß ein in der Schicht liegendes Magnetfeld einen starken stabilisierenden Einfluß gegenüber Störungen von kleinen Wellenlängen besitzt. Vorausgesetzt wurde ein diese Scheibe umgebendes Medium idealer elektrischer Leitfähigkeit mit einer wesentlich geringeren Dichte gegenüber der Dichte der Scheibe. Im Falle einer starren Rotation trägt die Rotation nicht zur Beseitigung einer Instabilität bei, wenn gleichzeitig ein Magnetfeld vorhanden ist. Dagegen kann eine differentielle Rotation (ohne Magnetfeld) bei Überschreitung eines kritischen Wertes eine Gravitationsinstabilität beseitigen.
Nimmt man weiterhin eine endliche elektrische Leitfähigkeit an, d.h. nicht vollständig ionisiertes Plasma, so ergibt sich ebenfalls eine Herabsetzung des stabilisierenden Einflusses des Magnetfeldes.
Bei Berücksichtigung der Viskosität zeigt sich deren Einfluß in einer Abschwächung der Störungsamplituden, nicht in deren Beseitigung. Die Viskosität verschiebt ferner den Einfluß maximaler Instabilität zu Störungen größerer Wellenlänge.
Dieses Ergebnis kann als charakteristisch für ein Medium gehalten werden, bei dem Magnetfeld und Rotationsachse senkrecht aufeinander stehen.
Als charakteristisch bei Parallelität von Rotationsachse und Magnetfeld kann dagegen das Verhalten eines gravitierenden Zylinders angesehen werden.
In einer Arbeit von M.V. Vyazovskii /25/ wird für eine unendliche, inkompressible Plasmasäule mit einem homogenen Magnetfeld entlang der Zylinderachse ohne Rotation

gezeigt, daß bei Störungen

$$e^{i(kz + m\varphi + \omega t)}$$

der Zylinder stabil bleibt, wenn asymmetrische Störungen vorliegen, d.h. $m = 0$. Bei symmetrischen Störungen dagegen, $m \neq 0$, kann Instabilität eintreten.
Der interessantere Fall eines rotierenden Zylinders wird von Yu.V. Vandakurov und E.N. Kolesnikova /26/ untersucht. Sie untersuchen einen gravitierenden, kompressiblen Zylinder mit einem homogenen Magnetfeld längs der Zylinderachse, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert. Für eine Störung

$$f(t) \cdot e^{i(\omega t + m\varphi)}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \rho &= 0 \\ p &= 0 \\ B &= B_\infty = \text{const.} \end{aligned}\right\} \quad r \geq R$$

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \text{const.} \\ p &= p_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \\ B^2 &= B_0^2 + (B_\infty^2 - B_0^2)\frac{r^2}{R^2} \end{aligned}\right\} \quad r \leq R$$

mit R : Zylinderradius, ergibt sich das Stabilitätskriterium

$$4\pi\mu^2 p_0 + B_0^2 \leq B_\infty^2 .$$

Hierbei ist μ^2 das Verhältnis der spezifischen Wärmen.
Es zeigt sich also, daß bei Stabilität das Magnetfeld am Rande stärker sein muß als im Zentrum.
Für den Fall $\rho = \rho(r)$ und $\Omega = 0$, d.h. keine Rotation, kann sich eine oszillierende Instabilität einstellen. Die Bedingung für Stabilität lautet hierbei

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho(r)}{dr} + \frac{4\pi\rho(r)}{4\pi\mu^2 p(r) + H^2(r)}\frac{d\phi}{dr} < 0 .$$

ϕ ist das Gravitationspotential. Hierin ist $\frac{d\phi}{dr} > 0$,

wenn $\frac{d\varphi}{dt} < 0$ als sinnvoll zu betrachten ist. Das Magnetfeld wirkt somit stabilisierend.
Eine astrophysikalisch interessante Abwandlung des obigen homogenen Magnetfeldes wird in einer Arbeit von P. Verma und Y.K. Verma /27/ untersucht. Es wird ein inkompressibler Plasmazylinder mit konstanter Rotation vorausgesetzt. Das Magnetfeld ist gegeben durch

$$\vec{B} = (0, A\frac{r}{R}, B) \qquad r < R$$

$$\vec{B} = (0, A_0\frac{R}{r}, B_0) \qquad r > R.$$

Die Störung erfolge durch

$$f(r)\cdot e^{im\varphi + ikz + i\omega t}.$$

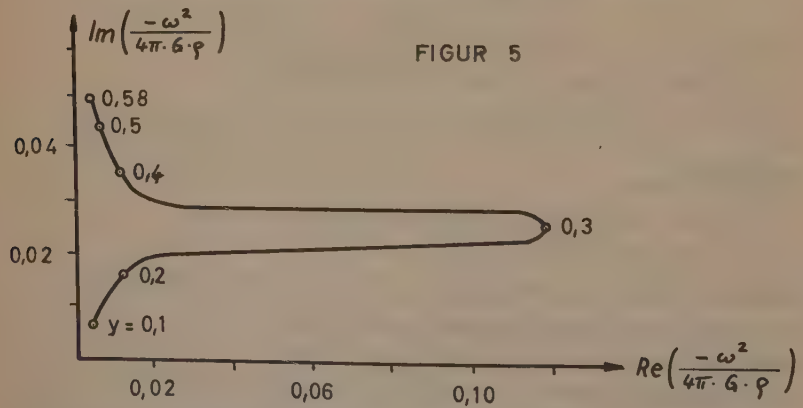
Das Ergebnis ist für

$$B^2 = B_0^2 = A_0^2 = A^2$$

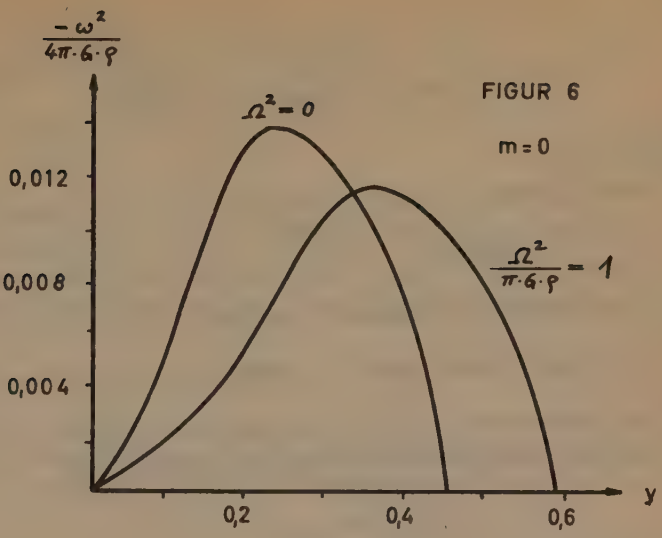
$$m = 0$$

in der Figur 5 wiedergegeben. Hierbei ist $y = |k|\cdot R$.

FIGUR 5



Der Realteil gibt das Maß für die Instabilität an.
Der Einfluß der Rotation läßt sich in der Figur 6 erkennen.



FIGUR 6

m = 0

Das Ergebnis ist folgendes:

1) Die Rotation wirkt nicht stabilisierend.
   Bei kleinen Wellenzahlen läßt der Rotationseinfluß die Störung langsamer anwachsen, bewirkt aber mit wachsender Wellenzahl den entgegengesetzten Effekt.
2) Die Rotation verschiebt den maximalen Instabilitätseinfluß zu höheren Wellenzahlen.

Num kann eine starre Rotation durchaus nicht als allgemein vorausgesetzt werden, und es zeigt sich auch in einer Arbeit von R. Ebert /28/, welcher Einfluß einer differentiellen Rotation auf die Stabilität eines idealen axialsymmetrischen Plasmas beizumessen ist. Unter Voraussetzung eines Magnetfeldes parallel zur Rotationsachse ergibt sich Instabilität bei einer Störung

$$f(r)\, e^{i(\omega t - kr)},$$

wenn

$$\rho > \rho_c = \frac{\Omega \left(2\Omega + r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)}{2\pi G} \qquad (45)$$

und

$$\lambda > \lambda_T = \left(\frac{\pi (a^2 + v_A^2)}{G \cdot \rho - \frac{\Omega}{2\pi} \left(2\Omega + r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)} \right)^{1/2} \qquad (46)$$

erfüllt sind.
Für eine Störung

$$f(t) \cdot e^{i(\omega t - k\varphi)}$$

erhält man ebenfalls Instabilität bei

$$\lambda > \lambda_\varphi = \lambda_T \quad \text{und} \quad \rho > \rho_c \, .$$

Für ein Plasma ohne Rotation und Magnetfeld geht (46) über in das schon bekannte Jeanssche Kriterium.

$$\lambda_T^2 = \lambda_J^2$$

Eine Störung in z-Richtung dagegen

$$f(t) \cdot e^{i(\omega t - kz)}$$

führt auf zwei Störungstypen. Zunächst ergibt sich das Jeanssche Stabilitätskriterium und weiterhin noch

$$\lambda > \lambda_z = \frac{\sqrt{\pi} \cdot B}{\left(-2\rho \cdot r \cdot \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^{1/2}}$$

mit $\frac{\partial \Omega}{\partial r} < 0$. Letztere Instabilität führt nicht zu Dichteänderungen des Plasmas.
Von G. Stephenson /29/ wurde noch der Fall untersucht, daß Magnetfeld und Rotationsachse in beliebiger Richtung liegen.

$$\vec{B} = (0, B_y, B_z)$$

$$\vec{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$$

Für den Fall eines viskosen Plasmas mit starrer Rotation kann das Jeanssche Stabilitätskriterium als notwendige Bedingung angesehen werden. Weiterhin ist bei

$\alpha)$ $\vec{B} = 0$ $\vec{\Omega} = 0$

$\beta)$ $\vec{B} = 0$ $\vec{\Omega} \neq 0$

das Jeanssche Kriterium notwendig und hinreichend.
Von D. Lynden-Bell und J.P. Ostriker /30/ wurde ein allgemeines Kriterium für die Stabilität gesucht. Ausgehend von der Bewegungsgleichung im rotierenden System

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \nabla \phi - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\vec{F}}{\rho}$$

wird gezeigt, daß das Stabilitätsproblem zurückgeführt werden kann auf die Eigenwertgleichung

$$-\omega^2 \cdot A\xi + \omega \cdot B\xi + C\xi = 0 .$$

Hierin sind die Operatoren

A: reell, hermitisch, positiv definit
B: imaginär, hermitisch
C: reell, hermitisch.

Als hinreichende Bedingung für die Stabilität des Systems erweist sich

C ist positiv definit.

Da das kosmische Medium auch einen Anteil kosmischen Staubes enthält, wurde der Einfluß dieses kosmischen Staubes auf das Jeanssche Kriterium von G.L. Kalra und S.P. Talwar /31/ untersucht. Es erweist sich hierbei die Kollisionsfrequenz zwischen Staub und Gas ohne Einfluß. Dagegen wird mit steigender Dichte und fallender Temperatur des Staubes die kritische Wellenlänge kleiner als die Jeanssche Wellenlänge. Es kann somit eine Fragmentierung in Gebiete erfolgen, die kleiner sind als der Jeansschen Wellenlänge entspricht.
Eingehender wurde diese Frage von S.S. Rao und G.L. Kalra /32/ für ein nicht vollständig ionisiertes Plasma mit homogenem Magnetfeld untersucht. Für eine Störung

$$f(z) \cdot e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

ergab sich folgendes Resultat, wenn $\vec{u}$ die Gleichgewichtsgeschwindigkeit ist.

a) $\vec{k} \perp \vec{u}$

Es ergeben sich nur stabile Zustände mit gedämpften Moden.

b) $\vec{k} \parallel \vec{u}$

1) $\vec{k} \parallel \vec{B}$

Für eine Kollisionsrate ν zwischen den ionisierten und neutralen Teilchen stellt sich unterhalb eines bestimmten ν_c eine stabilisierende Wirkung ein. Anderenfalls ergibt sich eine destabilisierende Wirkung. Das Magnetfeld wirkt stabilisierend.

2) $\vec{k} \perp \vec{B}$

Das Magnetfeld hat einen destabilisierenden Effekt. Auch hier existiert eine bestimmte Grenzkollisionsrate, unterhalb der das Plasma stabil ist.

Die interessante Frage, welchen Einfluß homogen verteilte Sterne in einem interstellaren Gas auf die kritische Wellenlänge haben, wird von M.N. Maksumov /33/ untersucht. Das Gas soll mit einem homogenen Magnetfeld durchsetzt sein. Bei einer Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung

$$\frac{N}{\sqrt{\pi}\cdot u}\, e^{-\frac{v^2}{u^2}}$$

für die Sterne, liegt der kritische Wert für die Instabilität bei

$$k < k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} \quad ,$$

wobei

$$k_c^2 = \frac{4\pi \cdot G \cdot \rho}{a^2} + \frac{8\pi \cdot G \cdot N \cdot M}{u^2} > k_J^2$$

N: Sterndichte

M: mittlere Sternmasse.

Die kritische Wellenlänge ist somit unabhängig vom Magnetfeld. Zudem wird die kritische Wellenlänge kleiner als die Jeanssche Wellenlänge mit wachsendem $N \cdot M$, was gleichbedeutend ist mit einer Begünstigung der Fragmentierung in kleine Gebiete mit wachsender Sternzahl.

Für ein rotierendes Sternsystem ohne Berücksichtigung des interstellaren Gases und Magnetfeldes wird eine Analogie zur Hydrodynamik eines Gases von L.S. Marochnik /34/ hergeleitet. Die Untersuchung der Stabilität dieses Systems führt zu folgendem Ergebnis. Setzt man

$$A = a_1^2 \cdot k^2 \cdot \cos^2\vartheta + a_2^2 \cdot k^2 \cdot \sin^2\vartheta + 4\Omega^2 - 4\pi G\rho$$

$$B = a_1^2 \cdot k^2 \cdot 4\Omega^2 \cdot \cos^2\vartheta + \frac{5}{6} a_1^2 a_2^2 k^4 \sin^2\vartheta \cdot \cos^2\vartheta - 4\pi \cdot G \cdot \rho \cdot k^2 \cdot \cos^2\vartheta \cdot \left\{ \sin^2\vartheta \cdot \left(\frac{2}{3} a_1^2 + \frac{1}{2} a_2^2 \right) + \frac{4\Omega^2}{k^2} \right\}$$

a_1: longitudinale Schallgeschwindigkeit

a_2: transversale Schallgeschwindigkeit,

so erhält man als notwendige und hinreichende Bedingung für die Stabilität

$$A > 0 \quad \text{und} \quad A^2 > 4 \cdot B > 0.$$

Bei $A < 0$ wird das System instabil.
Bei $B < 0$ ist die Instabilität aperiodisch, und für $4 \cdot B > A^2$ ergibt sich eine oszillierende Instabilität.
Aus $B = 0$ ergibt sich somit die kritische Wellenlänge

$$\lambda_c = f(\vartheta)$$

und für die Pulsation aus $4 \cdot B = A^2$

$$\lambda_{osz} = f(\vartheta).$$

Bei $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ erhält man somit

$$\lambda_c^2 = \frac{\pi^2 \cdot a_z^2}{\pi \cdot G \cdot \varrho - \Omega^2} \quad ,$$

und für $\vartheta = 0$

$$\lambda_c^2 = \frac{\pi \cdot a_z^2}{G \cdot \varrho} \quad .$$

Diese Ergebnisse stimmen mit den Ergebnissen von R. Ebert /28/ für ein Plasma ohne Magnetfeld überein.
Der Einfluß eines äußeren Gravitationsfeldes auf die Stabilität eines kompressiblen Mediums mit vernachlässigbarer Viskosität und idealer elektrischer Leitfähigkeit wird untersucht von A.V. Getling /35/. Vorausgesetzt werden ein konstantes Magnetfeld und eine Gravitationskraft entgegengesetzt zur z-Achse.
Die Stabilitätsbedingung gegenüber einer Störungswelle

$$e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

lautet

$$\frac{(\vec{B} \cdot \vec{k})^2}{4\pi \cdot \varrho} - \frac{g}{\varrho} \cdot \left(\frac{\partial \varrho}{\partial s}\right)_p \cdot \frac{ds}{dz} \cdot \sin^2 \vartheta > 0 \quad .$$

Es ist

$$\left(\frac{\partial \varrho}{\partial s}\right)_p < 0$$

und

g: Gravitationsbeschleunigung

s: Entropie .

Im Falle einer konvektiven Stabilität ist $\frac{ds}{dz} > 0$

Ist diese Bedingung nicht mehr erfüllt, dann ist $(\vec{B} \cdot \vec{k})$ entscheidend für die Instabilität.

Liegen beide parallel, so ist der stabilisierende Einfluß am größten. Weiterhin muß mit wachsender Wellenlänge der Störung das Magnetfeld größer werden, um den gleichen stabilisierenden Effekt zu erreichen. Für den Fall einer endlichen Leitfähigkeit tritt noch eine oszillierende Instabilität hinzu.
Diese Betrachtung mit einem äußeren Magnetfeld ist von Bedeutung für die Grenzschichten gravitierender Nebel.

Die in diesem Abschnitt zitierten Arbeiten geben allgemein gehaltene Untersuchungen wieder, die einen grundsätzlichen Überblick über das Instabilitätsverhalten eines Plasmas widerspiegeln.
Mit Rücksicht auf das speziell zu untersuchende Verhalten eines kosmischen Objektes während der verschiedenen Entwicklungsphasen muß sich aber eine gezielt auf dieses Objekt durchgeführte Untersuchung anschließen. Die zu dieser Untersuchung notwendigen Gleichungen werden im nächsen Kapitel zusammengestellt.

6. Differentialgleichungssystem der Störungsgrößen

Zur Stabilitätsuntersuchung eines Plasmas verwende ich das Gleichungssystem:

$$\rho\left\{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \phi\right) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})\right\} = -\nabla p + \tag{25}$$
$$+\mu\Delta\vec{v} + \frac{1}{3}\mu\nabla(\nabla\cdot\vec{v}) + \frac{1}{4\pi}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \tag{30}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla\times(\vec{v}\times\vec{B}) \tag{35}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho\vec{v}) \tag{36}$$

$$\Delta\phi = 4\pi\cdot G\cdot\rho\,. \tag{37}$$

Für eine ungestörte Plasmakonfiguration seien die Lösungen des obigen Gleichungssystems gegeben

$$\rho\,,\ p, \phi\,,\ \vec{v} \quad \text{und} \quad \vec{B},$$

so daß sich bei einem linearen Störungsansatz für die gestörten Größen ergibt:

$$\rho_0 = \rho + \delta\rho$$
$$p_0 = p + \delta p$$
$$\phi_0 = \phi + \delta\phi$$
$$\vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{u}$$
$$\vec{B}_0 = \vec{B} + \vec{b}.$$

Das Einsetzen dieser gestörten Größen in das obige Gleichungssystem ergibt ein Gleichungssystem für die Störungsgrößen, in dem Störungsgrößen zweiter Ordnung nicht berücksichtigt sind.
Aus der Gleichung (30) folgt die Gleichung:

$$\nabla\cdot\vec{b} = 0\,. \tag{47}$$

Aus der Gleichung (35) folgt die Gleichung

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \nabla \times \left(\vec{v} \times \vec{b} + \vec{u} \times \vec{B} \right) . \tag{48}$$

Aus der Gleichung (36) folgt die Gleichung

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} = - \nabla \cdot \left(\rho \vec{u} + \delta\rho \vec{v} \right) . \tag{49}$$

Aus der Gleichung (37) folgt die Gleichung

$$\Delta \delta\phi = 4\pi \cdot G \cdot \delta\rho . \tag{50}$$

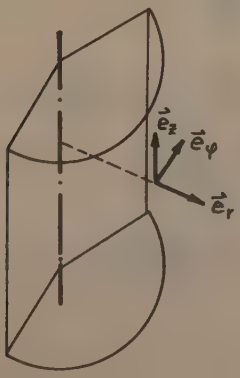
Da nun weiterhin

$$\frac{1}{\rho + \delta\rho} \simeq \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{\delta\rho}{\rho} \right)$$ ist, erhält man

für die Gleichung (25)

$$\begin{aligned} \rho \left\{ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left(\vec{v} \cdot \vec{u} + \delta\phi \right) - \left[\vec{v} \times (\nabla \times \vec{u}) + \vec{u} \times (\nabla \times \vec{v}) \right] \right\} = \\ = - \nabla \delta p + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \Delta \vec{u} + \frac{1}{4\pi} \left\{ (\nabla \times \vec{b}) \times \vec{B} + \right. \\ \left. + (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{b} \right\} - \frac{\delta\rho}{\rho} \left\{ - \nabla p + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) + \right. \\ \left. + \mu \Delta \vec{v} + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \right\} . \end{aligned} \tag{51}$$

Da es sich um rotierende Plasmasysteme handelt, führe ich Zylinderkoordinaten ein. Zudem soll Rotationssymmetrie vorliegen, d.h. $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$. Desweiteren ist



$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r} \tag{52}$$

$$\vec{v} = (0, v(r,z), 0)$$
$$\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega(r,z)) .$$

Damit erhalte ich für die Gleichungen (47) bis (51).

$$\frac{b_r}{r} + \frac{\partial b_r}{\partial r} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = 0 \qquad (53)$$

$$\frac{\partial b_r}{\partial t} = - \frac{\partial (\vec{u} \times \vec{B})_\varphi}{\partial z} \qquad (54)$$

$$\frac{\partial b_\varphi}{\partial t} = r \cdot \Omega \frac{\partial b_z}{\partial z} + r \cdot b_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} + r \cdot b_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + r \cdot \Omega \frac{\partial b_r}{\partial r} + \Omega \cdot b_r + \frac{\partial (\vec{u} \times \vec{B})_r}{\partial z} - \frac{\partial (\vec{u} \times \vec{B})_z}{\partial r} \qquad (55)$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = \frac{\partial (\vec{u} \times \vec{B})_\varphi}{\partial r} + \frac{(\vec{u} \times \vec{B})_\varphi}{r} \qquad (56)$$

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \frac{\rho \cdot u_r}{r} + \rho \frac{\partial u_r}{\partial r} + \rho \frac{\partial u_z}{\partial z} + u_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \qquad (57)$$

$$\frac{\partial^2 \delta\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \delta\phi}{\partial z^2} = 4\pi \cdot G \cdot \delta\rho \qquad (58)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial \delta\phi}{\partial r} - 2 \cdot u_\varphi \cdot \Omega \right\} = - \frac{\partial \delta p}{\partial r} + \frac{4}{3} \mu \left\{ \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right\} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial B_r}{\partial z} b_z - \frac{\partial B_z}{\partial r} b_z - \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} b_\varphi + \frac{\partial b_r}{\partial z} B_z - \frac{\partial b_z}{\partial r} B_z - \frac{\partial b_\varphi}{\partial r} B_\varphi - \right. \qquad (59)$$

$$- 2\,\frac{B_\varphi \cdot b_\varphi}{r}\Big\} - \frac{\delta\rho}{\rho}\Big\{ - \frac{\partial p}{\partial r} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial B_r}{\partial z} B_z - \frac{\partial B_z}{\partial r} B_z - \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} B_\varphi - \frac{B_\varphi^2}{r}\right)\Big\}$$

$$\rho\Big\{ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + r\cdot u_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + r\cdot u_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} + 2\cdot u_r \cdot \Omega\Big\} -$$

$$- \mu\left\{ \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\left\{ \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} b_r + \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} b_z + \frac{\partial b_\varphi}{\partial r} B_r + \frac{\partial b_\varphi}{\partial z} B_z +\right.$$

$$\left. + \frac{B_\varphi \cdot b_r}{r} + \frac{B_r \cdot b_\varphi}{r}\right\} - \frac{\delta\rho}{\rho}\Big\{\mu\Big(r\,\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \qquad (60)$$

$$+ 3\,\frac{\partial \Omega}{\partial r} + r\,\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}\Big) + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} B_r +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} B_z + \frac{B_\varphi \cdot B_r}{r}\right)\Big\}$$

$$\rho\left\{ \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial \delta\phi}{\partial z}\right\} = - \frac{\partial \delta p}{\partial z} + \frac{4}{3}\mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} +$$

$$+ \frac{1}{3}\mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial r\,\partial z} + \frac{1}{3}\mu \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} +$$

$$+ \mu \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{4\pi}\left\{ - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} b_\varphi - \qquad (61)$$

$$- \frac{\partial B_r}{\partial z} b_r + \frac{\partial B_z}{\partial r} b_r - \frac{\partial b_\varphi}{\partial z} B_\varphi - \frac{\partial b_r}{\partial z} B_r +$$

$$\left. + \frac{\partial b_z}{\partial r} B_r\right\} - \frac{\delta\rho}{\rho}\left\{ - \frac{\partial p}{\partial z} +\right.$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\left(- \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} B_\varphi - \frac{\partial B_r}{\partial z} B_r + \frac{\partial B_z}{\partial r} B_r \right)\Big\} .$$

Dieses Gleichungssystem (53) bis (61) für die Störungsgrößen $\delta\rho$, δp, $\delta\phi$, $\vec{u}$, $\vec{b}$ wird nun im Rahmen der sich anschließenden Untersuchungen jeweils unter speziellen Bedingungen zu untersuchen sein.

7. Stabilitätskriterien

Es sollen im Zusammenhang mit der Ableitung des Jeans-schen Stabilitätskriteriums die anzuwendenden Stabilitäts-kriterien angegeben werden.
Untersucht werden soll der spezielle Fall

$$\vec{\Omega} = 0 \qquad \text{und} \qquad \vec{B} = 0$$

für ein das Universum homogen und isotrop erfüllendes Plasma. Entsprechend dieser Voraussetzung gilt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 .$$

Für das Gleichungssystem (57) bis (61) folgt dann:

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \frac{\rho \cdot u_r}{r} + \rho \frac{\partial u_r}{\partial r} + \rho \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{62}$$

$$\frac{\partial^2 \delta\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \delta\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \delta\phi}{\partial z^2} = 4\pi \cdot G \cdot \delta\rho \tag{63}$$

$$\rho\left\{\frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial \delta\phi}{\partial r}\right\} = -\frac{\partial \delta p}{\partial r} + \frac{4}{3}\mu\left\{\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2}\right\} + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \mu\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \tag{64}$$

$$\rho\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} = \mu\left\{\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2}\right\} \tag{65}$$

$$\rho\left\{\frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial \delta\phi}{\partial z}\right\} = -\frac{\partial \delta p}{\partial z} + \frac{4}{3}\mu\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{3}\mu\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z} + \mu\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \mu\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} \tag{66}$$

Für den Fall einer in z-Richtung laufenden Störwelle

$$e^{i(\omega t - kz)}$$

folgt für die Störungsgrößen:

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega \qquad \frac{\partial}{\partial z} = -ik .$$

Und ich erhalte dann für die Gleichungen (62) bis (66)

$$u_r = u_\varphi = 0$$

$$\begin{pmatrix} -k\cdot\varrho & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 4\pi\cdot G & k^2 & 0 \\ \left(\omega - i\frac{4}{3}\nu\cdot k^2\right) & 0 & -k & -\frac{k}{\varrho} \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_z \\ \delta\varrho \\ \delta\phi \\ \delta p \end{pmatrix} = 0 ,$$

wenn ich weiterhin die Beziehung

$$\delta p = a^2 \cdot \delta\varrho$$

verwende (Isothermie) und die kinematische Zähigkeit

$$\nu = \frac{\mu}{\varrho}$$

einführe.
Eine nichttriviale Lösung ist nur möglich, wenn

$$\omega^2 - i\omega\,\frac{4\cdot\nu\cdot k^2}{3} - \left(k^2 a^2 - 4\pi\cdot G\cdot\varrho\right) = 0 .$$

Setze ich $\omega = -i\cdot\alpha$, so ergibt sich hierfür

$$\alpha^2 + \alpha\,\frac{4\cdot\nu\cdot k^2}{3} + \left(k^2 a^2 - 4\pi\cdot G\cdot\varrho\right) = 0. \qquad (67)$$

Gleichzeitig mit dieser Transformation ergibt sich für die Stabilitätsbedingung (40) die neue Bedingung

$$\mathrm{Re}\,(\alpha) < 0. \qquad (68)$$

Allgemein läßt sich die charakteristische Gleichung (67) mit reellen Koeffizienten in der folgenden Form schreiben:

$$a_0 \cdot \alpha^n + a_1 \cdot \alpha^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} \cdot \alpha + a_n = 0. \qquad (69)$$

Eine notwendige Bedingung für die Stabilität bei $a_0 > 0$ ist

$$a_k > 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (70)$$

Verschwindet ein Koeffizient oder ist ein Koeffizient negativ, so ist das System instabil.
Notwendige und hinreichende Bedingungen liefert das Routh-Hurwitz Kriterium /36/.

$$a_0 > 0\,;\ \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0 \qquad (71)$$

Die hierbei verwendeten Hurwitz-Determinanten sind:

$$\Delta_1 = a_1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{2k-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_k \end{vmatrix}$$

mit $a_\ell = 0$, wenn $\ell > n$.
Wende ich diese Kriterien auf die charakteristische Gleichung (67) an, so ergibt sich nach (70) sofort:

$$\Omega_j^2 = k^2 a^2 - 4\pi G \rho > 0 \qquad \text{und} \qquad \nu \cdot k^2 > 0.$$

Entsprechendes ergibt sich bei Anwendung von (71). Damit folgt als hinreichende und notwendige Bedingung für die Stabilität des Plasmas das bereits genannte Jeanssche Stabilitätskriterium.

$$\lambda^2 < \lambda_J^2 = \frac{a^2 \cdot \pi}{G \cdot \varrho} \qquad (72)$$

da $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ist.

Damit sind alle Voraussetzungen geschaffen, die zur Untersuchung eines Plasmasystems erforderlich sind. Was fehlt, sind die das Plasmasystem kennzeichnenden speziellen Bedingungen. Dazu gehören die Abmessungen, die Dichte, der Drehimpuls, die Winkelgeschwindigkeitsverteilungskurve (differentielle Rotation) und die Stärke des Magnetfeldes.

Hierzu ist bereits etwas im Kapitel über "Allgemeine Voraussetzungen" gesagt worden. Unter Verwendung der dort genannten Ergebnisse müssen aber die zu diesen Ergebnissen führenden physikalischen Vorgänge genauer untersucht werden .Dies kann nur geschehen, indem das dort genannte kosmologische Modell der Urknallhypothese in seiner zeitlichen Entwicklung im hier erforderlichen Umfang durchgerechnet wird. Dies geschieht in den nächsten Kapiteln.

8. Entwicklung des Universums bis zur Bildung neutralen Wasserstoffs

Als Ausgangspunkt in der Vergangenheit soll nicht ein hypothetischer Zeitnullpunkt bei $t = 0$ gewählt werden, sondern ein Zeitpunkt, bei dem entsprechend dem Zustand des Universums die Anwendung der Allgemeinen Relativitätstheorie als berechtigt erscheint. Es soll damit eine Singularität des Gravitationsfeldes vermieden werden, da dann nach A. Einstein /37/ die Anwendung dieser Theorie inadäquat ist.
Weiterhin werde ich unter Vernachlässigung möglicher Turbulenzen eine homogene Dichteverteilung während dieses Zeitabschnittes annehmen. Dies erscheint gerechtfertigt, da infolge der Wechselwirkung von Photonen und Elementarteilchen eine genügend starke Kopplung vorliegt, die Kondensationen weitgehend verhindert und auftretende Turbulenzen rasch zum Abklingen bringt.
Dies gestattet es mir, dem Gedankengang von A.A. Friedmann /38/ zu folgen, wonach Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen ohne kosmologische Konstante gefunden werden können. Der Gedanke von A.A. Friedmann war: Ein vierdimensionaler Raum, der bezüglich dreier Dimensionen isotrop ist. Diese räumliche Isotropie des homogen mit Materie erfüllten Raumes bedeutet, daß zu jedem Zeitpunkt für einem am beliebigem Ort befindlichen Beobachter die gleiche Metrik Verwendung findet.
Überlegungen zu diesem Weltmodell sind zu finden bei H. Vogt /39/, L. Witten /40/, A. Trautmann /41/, L.D. Landau /42/, M.v. Laue /43/, V.A. Fock /44/ und /45/, H. Alfvén /13/ und Ya.B. Zeldovich /7/.
Eine passende Metrik erhält man, wenn der isotrope dreidimensionale Raum mit dem Krümmungsradius

$$\bar{R}^2 = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 + \bar{x}_4^2$$

in eine vierdimensionale Hypersphäre eingebettet wird.
Das Linienelement lautet

$$dl^2 = d\bar{x}_1^2 + d\bar{x}_2^2 + d\bar{x}_3^2 + d\bar{x}_4^2.$$

Die raum-zeitliche Metrik des Friedmannschen Modells ergibt sich dann zu

$$ds^2 = c^2 \cdot dt^2 - dl^2,$$

wenn t die Eigenzeit eines Raumpunktes ist. Nach kurzer Rechnung ergibt sich daraus dann die Robertson-Walker Metrik:

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{S(t)^2}{\left[1 + \frac{\kappa}{4} r^2\right]^2} \left\{ dr^2 + r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \cdot d\varphi^2 \right) \right\}.$$

Die Konstante κ gibt das Vorzeichen der Raumkrümmung an, so daß sich entsprechend ergibt:

$\kappa = 1$ sphärischer Einheitsraum: geschlossen, d.h. endliches Volumen.

$\kappa = 0$ euklidischer Einheitsraum.

$\kappa = -1$ pseudosphärischer Einheitsraum; offen, d.h. unendliches Volumen.

Weiterhin ist τ dimensionslos und

$$S(t) = \frac{\bar{R}(t)}{c} \quad . \tag{73}$$

Die Einsteinsche Gravitationsgleichung

$$R_e^{\kappa} - \frac{1}{2} \delta_e^{\kappa} R_j^{j} = - \frac{8\pi \cdot G}{c^2} T_e^{\kappa} \tag{74}$$

gibt nun den Zusammenhang zwischen der Raumkrümmung und der die Metrik erzeugenden Materie an. Hierin ist der Energie-Impuls Tensor

$$T_e^{\kappa} = (\bar{\rho} \cdot c^2 + \bar{p}) \cdot g_{ie} u^i u^{\kappa} - \delta_e^{\kappa} \bar{p} \quad .$$

$\bar{\rho}$ ist die Gesamtdichte (Photonen und Elementarteilchen) und $\bar{p}$ der Strahlungsdruck. In einem mit dem Plasma mitbewegtem Koordinatensystem ist

$$u^0 = 1 \qquad u^1 = u^2 = u^3 = 0,$$

und dementsprechend

$$T_0^{\ 0} = \bar{\rho} \cdot c^2 \qquad T_1^{\ 1} = T_2^{\ 2} = T_3^{\ 3} = -\bar{p}.$$

Die Funktion S(t) (73) läßt sich mit dem Ricci-Tensor in Beziehung setzen.

$$R_0^0 = 3\,\frac{\ddot{S}}{S}$$

$$R_\alpha^\alpha = \frac{1}{S^2}\left(\dot{S}S + 2\cdot\dot{S}^2 + 2\cdot\kappa\cdot c^2\right)$$

Zusammen mit der Einsteinschen Gravitationsgleichung (74) ergeben sich damit für jeden am beliebigem Raumpunkt befindlichen Beobachter die Gleichungen:

$$8\pi\cdot G\cdot\bar{\rho} = \frac{3}{S^2}\left(\kappa + \dot{S}^2\right) \tag{75}$$

$$-\frac{8\pi\cdot G}{c^2}\,\bar{p} = \frac{2\cdot\ddot{S}}{S} + \frac{\dot{S}^2}{S^2} + \frac{\kappa}{S^2}\,. \tag{76}$$

Den drei zu bestimmenden Größen S, $\bar{\rho}$ und $\bar{p}$ stehen nur die beiden Gleichungen (75) und (76) gegenüber. Es soll daher weiterhin die von Ya.B. Zeldovich /46/ angegebene Zustandsgleichung verwendet werden.

$$\bar{p} = (\nu - 1)\cdot\bar{\rho}\cdot c^2 \tag{77}$$

ν soll als zeitlich unabhängig betrachtet werden. Führe ich die Abkürzung

$$K_\nu = \frac{8\pi\cdot G}{3}\,\bar{\rho}\cdot S^{3\nu} \tag{78}$$

ein, so läßt sich mit (76) leicht zeigen, daß

$$K_\nu = \text{const.} \qquad \nu \neq 0,\ \bar{\rho} \neq 0\,. \tag{79}$$

Damit ergeben sich als Lösungen für S aus (75), (76) und (77):

$$S = \left\{K_\nu\cdot\sin^2\omega\right\}^{\frac{1}{3\nu-2}} \qquad \kappa = 1 \tag{80}$$

$$S = \left\{K_\nu\cdot\omega^2\right\}^{\frac{1}{3\nu-2}} \qquad \kappa = 0 \tag{81}$$

$$S = \left\{ K_\mu \cdot \sinh^2 \omega \right\}^{\frac{1}{3\nu - 2}} \qquad \kappa = -1 . \tag{82}$$

Hierin ist

$$\frac{dt}{d\omega} = \frac{2 \cdot S}{3 \cdot \mu - 2} \quad . \tag{83}$$

An der unteren Grenze des hier zu untersuchenden Entwicklungsabschnittes kann die Voraussetzung gemacht werden, daß μ den maximalen Wert von $\mu = \frac{4}{3}$ hat. Dies gilt umso genauer, je höher die Dichte ist und damit der Strahlungsdichteanteil überwiegt. Zudem haben die Teilchen dann eine gegenüber der Ruheenergie große kinetische Energie, d.h. sie bewegen sich ultrarelativistisch.
Für die Gleichungen (80) bis (83) ergeben sich, wenn

$$K = K_{4/3} = \frac{8\pi \cdot G}{3} \bar{\rho} \cdot S^4 = \text{const.} \tag{84}$$

die Gleichungen:

$$S = K^{1/2} \cdot \sin \omega \qquad \kappa = 1 \tag{85}$$

$$S = K^{1/2} \cdot \omega \qquad \kappa = 0 \tag{86}$$

$$S = K^{1/2} \cdot \sinh \omega \qquad \kappa = -1 \tag{87}$$

wobei $t = \int_0^\omega S(\omega) \cdot d\omega$ ist, und damit

$$t = K^{1/2} \cdot (1 - \cos \omega) \qquad \kappa = 1 \tag{88}$$

$$t = K^{1/2} \frac{\omega^2}{2} \qquad \kappa = 0 \tag{89}$$

$$t = K^{1/2} \cdot (\cosh \omega - 1) \qquad \kappa = -1 . \tag{90}$$

In erster Näherung erhält man, wenn

$\omega^2 \ll 6$, d.h. $t \ll 3 \cdot K^{1/2}$

für die Fälle $\kappa = 1$ und $\kappa = -1$ die Lösungen

$$\bar{R} = c \cdot 2^{1/2} \cdot K^{1/4} \cdot t^{1/2} = \text{const.} \cdot t^{1/2} \tag{91}$$

$$\bar{\varrho} = \frac{3}{32\pi \cdot G \cdot t^2} = \frac{4{,}48 \cdot 10^5}{t^2} \quad . \qquad (92)$$

Sie gelten generell bei $\kappa = 0$.
Entsprechend den Gleichungen (91) und (92) wird somit das relativistische Plasma oder besser Gas aus Photonen und Elementarteilchen expandieren. Mit fortschreitender Expansion werden die Teilchenenergien vergleichbar mit den Ruheenergien; bei Temperaturen von $T < 10^8$ °K können die Teilchen nicht mehr als relativistisch angesehen werden.
Dies entspricht einer Tendenz von $\nu \to 1$. Der Druck kann somit immer mehr vernachlässigt werden $\bar{p} < \bar{\varrho} \cdot c^2$. Dieser Zustand wird annähernd bei $T = 4 \cdot 10^3$ °K erreicht sein.
Aus (80) bis (83) folgt dann:

$$S = K_1 \cdot \sin^2\omega \qquad \kappa = 1 \qquad (93)$$

$$S = K_1 \cdot \omega^2 \qquad \kappa = 0 \qquad (94)$$

$$S = K_1 \cdot \sinh^2\omega \qquad \kappa = -1 \qquad (95)$$

und $$dt = 2 \cdot S \cdot d\omega \qquad (96)$$

Weiterhin folgt aus (78) und (79)

$$K_1 = \frac{8\pi \cdot G}{3} \bar{\varrho} \cdot S^3 = \text{const.} \quad . \qquad (97)$$

Es ergibt sich dann mit (96):

$$t = K_1 \{\omega - \sin\omega \cdot \cos\omega\} \qquad \kappa = 1 \qquad (98)$$

$$t = \frac{2}{3} K_1 \cdot \omega \qquad \kappa = 0 \qquad (99)$$

$$t = K_1 \{\sinh\omega \cdot \cosh\omega - \omega\} \qquad \kappa = -1 \qquad (100)$$

In der ersten Näherung erhält man, wenn

$$\omega^2 \ll 6, \text{ d.h. } t \ll 7{,}35 \cdot K_1 \qquad (101)$$

für die Fälle $K = 1$ und $K = -1$ die Lösungen

$$\bar{R} = c \cdot (4 \cdot K_1)^{1/3} \cdot t^{2/3} = const. \cdot t^{2/3} \qquad (102)$$

$$\bar{\rho} = \frac{3}{32\pi \cdot G \cdot t^2} = \frac{4{,}48 \cdot 10^5}{t^2} \; . \qquad (103)$$

Weiterhin ergibt sich für $K = 0$:

$$\bar{R} = c \left(\frac{9 \cdot K_1}{4} \right)^{1/3} \cdot t^{2/3} = const. \cdot t^{2/3} \qquad (104)$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{6\pi \cdot G \cdot t^2} = \frac{7{,}97 \cdot 10^5}{t^2} \; . \qquad (105)$$

Die Größe der Konstanten K_1 wird im 10. Kapitel bestimmt.
Das Ergebnis ist somit, daß für jeden oben betrachteten Einheitsraum die Dichte zwischen der 1.Phase ($T = 3 \cdot 10^9$ °K) und der 2. Phase ($T = 4 \cdot 10^3$ °K) während der Expansion nach

$$\bar{\rho} = \frac{const.}{t^2} \qquad (106)$$

abnimmt. Desweiteren zeigt sich, daß bis auf Faktoren der Größenordnung 2 der euklidische Einheitsraum zur Beschreibung der Expansion gewählt werden kann. Erst oberhalb der einschränkenden Bedingung, $\omega^2 \ll 6$, treten Differenzen auf. Es kann abschließend festgestellt werden, daß die durch die Annahme $\bar{p} < \bar{\rho} \cdot c^2$ erhaltenen kosmologischen Modelle dem Newtonschen Kosmologischen Modell entsprechen.

9. Instabilität während der 2. Phase

Es würde das Universum nach der 2. Phase bezüglich der Dichte weiterhin homogen expandieren, wenn nicht durch Entkopplung von Strahlung und Materie Inhomogenitäten infolge Instabilität aufträten. Diese Instabilitäten werden Jeansscher Art sein, da Magnetfelder in ihrem Einfluß vernachlässigbar sein sollen.
Verwende ich das bereits abgeleitete Jeanssche Kriterium, so kann ausgesagt werden, daß sich ein Plasma stabil verhält gegenüber Störungen

$$\lambda^2 < \lambda_J^2 = \frac{2 \cdot a^2 \cdot \pi}{G \cdot \bar{\rho}} \quad . \qquad (72)$$

Die Verwendung dieser Bedingung in einem expandierendem Universum kann dadurch gerechtfertigt werden, daß der räumliche Bereich der Instabilität klein ist gegenüber dem Gesamtraum; es kann somit die Raumkrümmung vernachlässigt werden. Dieses Jeanssche Kriterium ergibt dann die nachfolgenden Resultate.
Für die Schallgeschwindigkeit gilt

$$a^2 = \frac{2 \cdot \gamma \cdot p}{\bar{\rho}} \qquad (107)$$

mit dem inneren Druck

$$p = \frac{\bar{\rho}}{2} \cdot \frac{R \cdot T}{\mu} \quad . \qquad (108)$$

Es ist γ das Verhältnis der spezifischen Wärmen. Bei einem Photonengas ist $\gamma = \frac{4}{3}$; bei einem einatomigen nicht relativistischem Gas ist $\gamma = \frac{5}{3}$. In diesem Falle dürfte der Mittelwert $\gamma = \frac{3}{2}$ gelten.
Weiterhin ist μ das mittlere Molekulargewicht

$$\mu = \begin{cases} 1 & T \leq 4 \cdot 10^3 \ ^\circ K \\ 1/2 & T > 4 \cdot 10^3 \ ^\circ K \end{cases}$$

Der Strahlungsdruck beträgt nun während der 2. Phase

$$\bar{p} = \frac{1}{6} \bar{\rho} \cdot c^2 = \frac{1}{3} a_s \cdot T^4 \ ,$$

wobei

$$a_3 = \frac{8\pi^5 \cdot k^4}{15 \cdot c^3 \cdot h^3} = 7{,}57 \cdot 10^{-15} \quad erg \cdot grad^{-4} \cdot cm^{-3} .$$

Für (107) mit (108) und (103) ergibt sich dann

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= 1{,}25 \cdot 10^8 \frac{T}{\mu} \\ T &= \frac{1{,}295 \cdot 10^{10}}{t^{1/2}} \end{aligned}\right\} \quad a^2 = \frac{1{,}61 \cdot 10^{18}}{\mu \cdot t^{1/2}} \; . \qquad (109)$$

Das Jeanssche Kriterium lautet damit

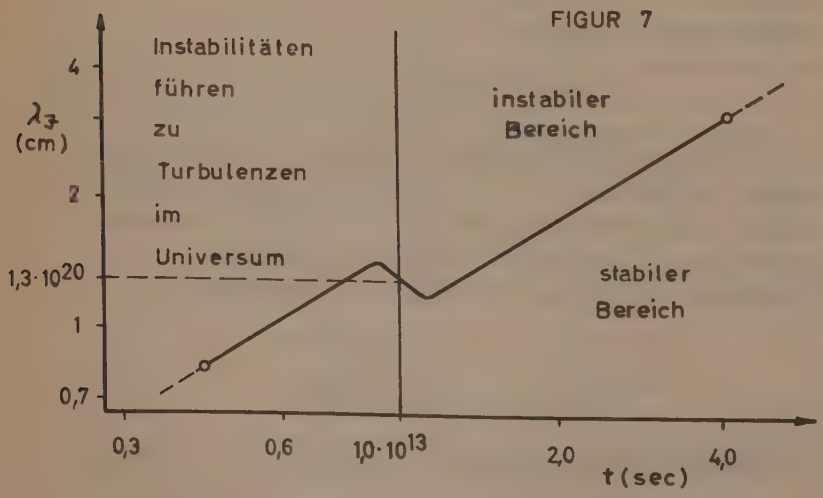
$$\lambda^2 < \lambda_J^2 = \frac{3{,}39 \cdot 10^{20}}{\mu} t^{3/2}$$

bzw.

$$\lambda < \lambda_J = \begin{cases} 1{,}84 \cdot 10^{10} \cdot t^{3/4} & T \leq 4 \cdot 10^3 \; ^\circ K \\ 2{,}61 \cdot 10^{10} \cdot t^{3/4} & T > 4 \cdot 10^3 \; ^\circ K . \end{cases} \qquad (110)$$

Dieses Ergebnis ist in der Figur 7 dargestellt.

FIGUR 7



Ein Vergleich mit (9) zeigt, daß, unabhängig von der dort durchgeführten Abschätzung, sich hier ebenfalls eine größenordnungsmäßig gleiche Abmessung der Instabilitätsgebiete ergibt. Der Zeitpunkt der 2. Phase ($t_2 = 10^{13}$ sec) errechnet sich aus (109), wenn man $T = 4 \cdot 10^3$ °K einsetzt. Berechnet man nach (103) die Materiedichte zu diesem Zeitpunkt, so erhält man

$$\rho = \frac{\bar{\rho}}{2} = 2{,}04 \cdot 10^{-21} \; g \cdot cm^{-3} . \qquad (111)$$

Ein Vergleich mit (8) zeigt auch hier eine größenordnungsmäßige Übereinstimmung.
Unter der Annahme, daß die 2. Phase im Temperaturintervall

$$2 \cdot 10^3 < T < 6 \cdot 10^3 \; ^\circ K$$

liegt, ergibt sich aus (109) für die Zeitdauer der 2. Phase

$$4{,}20 \cdot 10^{13} > t > 0{,}47 \cdot 10^{13} \; sec$$

$$\Delta t_2 = 1{,}18 \cdot 1o^6 \; á.$$

Die Jeanssche Wellenlänge variiert während dieser Zeit im Bereich

$$3{,}05 \cdot 1o^{20} > \lambda_J > 0{,}83 \cdot 1o^{20} \; cm.$$

Nur in diesem Bereich gilt (110) mit der entsprechenden Figur 7, da vor Beginn der 2. Phase das Jeanssche Kriterium nicht anwendbar ist (Kopplung von Strahlung und Materie) und nach der 2. Phase ebenfalls nicht (es gilt (103) nicht mehr).
Die Interpretation der Figur 7 wird somit sein, daß Turbulenzelemente bis auf die Größe der Jeansschen Wellenlänge anwachsen können, um dann als Inhomogenitäten infolge der Strahlungsentkopplung und Gravitationsinstabilität im expandierenden Universum aufzutreten.
Eine genauere Analyse der Instabilitätsgebiete müßte die Rotation der Turbulenzelemente berücksichtigen. Hierzu käme (46) in Frage

$$\lambda_J^2 = \frac{a^2 \cdot \pi}{G \cdot \rho - \frac{\Omega}{2\pi}\left(2\Omega + r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)} \; . \qquad (46)$$

In z-Richtung bleibt weiterhin (72) gültig.
Geklärt werden muß der Anteil der differentiellen Rotation. Für ein Turbulenzelement im homogenen Medium gilt bei Annahme einer ebenen Strömung (als Näherung hier zulässig) die Lösung von Oseen /47/:

$$\Omega = \Omega_0 \frac{r_0^2}{r^2}\left(1 - exp\left(-\frac{r^2}{4 \cdot \nu \cdot t_*}\right)\right) . \qquad (112)$$

Hierin ist Ω_0 die Winkelgeschwindigkeit im Abstand r_0 vom Wirbelzentrum nach dem Einsetzen der Wirbelbewegung zum Zeitpunkt $t_* = 0$. ν sei allein die molekulare kinematische Viskosität /15/, da die Strahlungsviskosität unberücksichtigt bleiben soll

$$\nu = \frac{\sqrt{2}}{\pi \cdot \varrho} \frac{\sqrt{m_0}\,(k \cdot T)^{5/2}}{e_0^4 \cdot \ln \Lambda}$$

In Λ ist der Coulomb-Logarithmus.

$$\Lambda = \frac{3}{2 \cdot e_0^3}\left(\frac{m_0 \cdot k^3 \cdot T^3}{\pi \cdot \varrho}\right)^{1/2}$$

Hieraus ergibt sich bei $\ln \Lambda = 10$ für die Viskosität

$$\nu = 2{,}5 \cdot 10^{-16} \frac{T^{5/2}}{\varrho} \qquad cm^2 \cdot sec^{-1} .$$

Zum Zeitpunkt der 2. Phase somit

$$\nu = 2{,}5 \cdot 10^{14} \qquad cm^2 \cdot sec^{-1} .$$

Damit ergibt sich für (112)

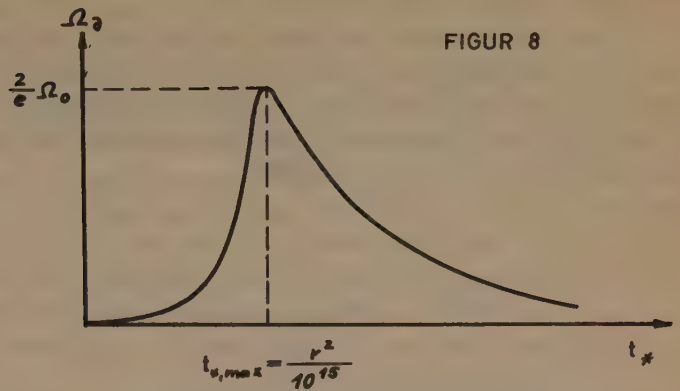
$$\Omega = \Omega_0 \frac{r_0^2}{r^2}\left[1 - exp\left(-\frac{r^2}{10^{15} \cdot t_*}\right)\right] .$$

Daraus ergibt sich dann im Nenner von (46)

$$\Omega_\partial = \left(2 \cdot \Omega + r \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)$$

$$= \frac{2 \cdot \Omega_0 \cdot r_0^2}{10^{15} \cdot t_*} exp\left(-\frac{r^2}{10^{15} \cdot t_*}\right) .$$

In der Figur 8 ist das allgemeine Verhalten von Ω_3 dargestellt.



FIGUR 8

Für Turbulenzelemente, die die Größe der Jeansschen Wellenlänge erreichen, gilt

$$r \geq \lambda_J .$$

Damit ergibt sich aber

$$t_{*,max} = \frac{r^2}{10^{15}} \geq 10^{36} \text{ sec} .$$

Diese Zeit überschreitet das Weltalter um acht Zehnerpotenzen. Während der Zeitdauer der 2. Phase mit $\Delta t_2 = 3{,}7 \cdot 10^{13}$ sec ergibt sich, daß praktisch

$$\Omega_3 = 0. \qquad (113)$$

An diesem Resultat ändert sich nichts, selbst wenn ich die verwendete kinematische Viskosität infolge der Turbulenz um den Faktor 10^5 zu klein angesetzt haben sollte.

Das sich daraus ergebende recht interessante Ergebnis ist, daß selbst bei Beachtung der Rotation das Jeanssche Kriterium seine Gültigkeit entsprechend der Figur 7 behält, d.h. die Turbulenzelemente in kugelförmiger Gestalt instabil werden.

Es werden somit während der 2. Phase Gebiete mit unterschiedlichstem Drehimpuls instabil werden, alle aber in der gleichen Größenordnung von etwa 10^{20} cm. Diese Instabilitätsgebiete werden bei einem weiterhin expandierendem Universum in homogener Verteilung das Universum als Inhomogenitäten bezüglich einer weiterhin homogenen Strahlungsdichte erfüllen. Das soll im nächsten Kapitel noch kurz genauer untersucht werden.

10. Entwicklung des Universums nach der 2. Phase

In diesem Kapitel betrachte ich nicht die Entwicklung der Inhomogenitäten, sondern des Universums im Großen. Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichung (74) sind für ein inhomogenes Medium noch nicht gefunden worden. Die Aufstellung des Energie-Impuls Tensors stößt auf Schwierigkeiten. Es kann daher nur die Näherung betrachtet werden, daß jetzt inhomogen auftretende Masse als weiterhin homogen verteilt anzusehen ist. Es können dann die Ergebnisse (93) bis (100) weiterhin verwendet werden. Lediglich die Näherungen (102) und (103) bedürfen einer Überprüfung, da sie nach (101) nur gelten für $\omega^2 \ll 6$.
Zur Überprüfung verwende ich die gegenwärtigen Meßwerte von:

$$\begin{aligned} 75\ \mathrm{km/Mpc/sec} &< H < 100\ \mathrm{km/Mpc/sec} \\ 10^{-32}\mathrm{g/cm^3} &< \bar{\rho} < 10^{-30}\mathrm{g/cm^3}\ . \end{aligned} \qquad (114)$$

Für $\kappa = 1$ (geschlossenes Universum) ergibt sich aus (93) und (97)

$$H = \frac{\dot{S}}{S} = \frac{K_1}{S^2} \sin\omega \cdot \cos\omega = \left(\frac{8\pi \cdot G}{3}\right)^{1/2} \bar{\rho}^{1/2} \cdot \cos\omega\ .$$

Hieraus läßt sich $\cos\omega$ bestimmen:

$$3{,}26 < \cos\omega < 43{,}3\ .$$

Somit keine Lösung. Innerhalb der in (114) gegebenen Grenzen wäre das geschlossene Universum auszuschließen. Im Falle $\kappa = -1$ ergäbe sich analog aus (95) und (97) für $\cosh\omega$

$$3{,}26 < \cosh\omega < 43{,}3 \qquad (115)$$

Dieses für einen hyperbolischen Raum sprechende Ergebnis läßt sich in Übereinstimmung mit (75) direkt bestätigen. Danach ergäbe sich als Kriterium:

$$\Theta = \frac{8\pi \cdot G}{3} \bar{\rho} - H^2 = \begin{cases} > 0 & \kappa = 1 \\ = 0 & \kappa = 0 \\ < 0 & \kappa = -1. \end{cases}$$

Mit (111) dann

$$-0{,}5\cdot10^{-35} < \Theta < -1{,}0\cdot10^{-35}.$$

Dieses Ergebnis ist insofern fragwürdig, als eine homogen verteilte Masse unterstellt wurde, entgegen der zu beobachtenden Realität. Es kann und soll daher auch hier keine Entscheidung zu Gunsten eines Weltmodells gefällt werden, da diese Entscheidung einer weit eingehenderen Untersuchung bedarf.
Entscheidend bleibt für meine Überprüfung das Ergebnis (115)

$$3{,}42 < \omega^2 < 19{,}9,$$

das bei Vergleich mit (101) zeigt, daß die gemachten Näherungen (102) und (103) auf die gegenwärtige Entwicklungsphase nicht mehr anwendbar sind.
Bei Unterstellung eines hyperbolischen Raumes erhalte ich dann für K_1 aus (95) und (97) den Wert

$$K_1 = \left(\frac{3}{8\pi\cdot G}\right)^{1/2} \frac{1}{\bar{\rho}^{1/2}\cdot \sinh^3\omega}$$

$$1{,}65\cdot10^{14} < K_1 < 4{,}50\cdot10^{16}. \qquad (116)$$

Es zeigt sich somit, daß die Näherungen (102) und (103) gelten für Zeiten

$$t \ll 1{,}2\cdot10^{15} \ldots\ldots 3{,}3\cdot10^{17} \text{ sec.} \qquad (117)$$

Entsprechend dem Ergebnis (106) kann die 2. Phase noch mit dieser Näherung untersucht werden. Das gilt selbstverständlich erst recht bei einem euklidischen Einheitsraum. Somit ist das in der Figur 7 dargestellte Ergebnis als korrekt anzusehen.
Andererseits darf diese Feststellung nicht auf Zeiten weit vor der 2. Phase ausgedehnt werden, da dann die Näherung $\bar{p} < \bar{\rho}\cdot c^2$ ihre Gültigkeit verliert.
Hier soll aber die Entwicklung des Universums nach der 2. Phase untersucht werden. Die Situation ist nun derart, daß bei expandierendem Universum die elektromagnetische Strahlung weiterhin den Raum homogen erfüllt. Gemäß der in

(117) gegebenen Beschränkung wird die Abnahme der Strahlungsdichte beschrieben durch (106). Infolge Instabilität wird dagegen die Materie nicht homogen im Universum verteilt sein, dagegen wohl homogen verteilt als räumlich fixierte Instabilitätsgebiete. Die Beobachtung zeigt nun, daß heute zwischen den kosmischen Objekten (Galaxien, Nebeln etc.) weite Räume liegen, deren Materiedichte gering ist im Vergleich zu der Dichte in diesen Objekten. Andererseits sind die Abmessungen der kosmischen Objekte vernachlässigbar gegenüber deren Abständen. Es läßt sich daher gegenwärtig die Entwicklung der einzelnen kosmischen Objekte derart untersuchen, daß im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie die Schwarzschildsche Metrik Anwendung findet.

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2 \cdot G \cdot M}{r \cdot c^2}} + r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2 \right) - c^2 \left(1 - \frac{2 \cdot G \cdot M}{r \cdot c^2} \right) dt^2 \qquad (118)$$

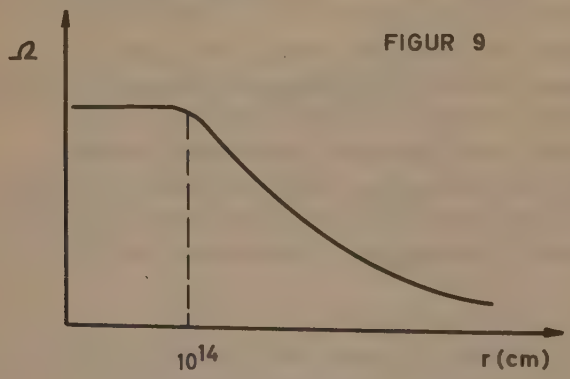
Entsprechend (3) reduziert sich (118) sogar auf eine pseudoeuklidische Metrik. Das Schwarzschildsche Linienelement ist natürlich nicht verwendbar nahe der 2. Phase. Es könnte höchstens als erste Näherung Verwendung finden.
Damit soll die Entwicklung des Universums im Großen nicht weiter verfolgt werden, da in dieser Arbeit die Entwicklung der Einzelobjekte (Turbulenzelemente) interessiert.

11. Entwicklung der Instabilitätsgebiete nach der 2.Phase

Nach dem Abschluß der 2. Phase bei etwa $T = 2 \cdot 10^3\ ^oK$ verbleiben im expandierenden Universum sphärische Turbulenzelemente.
Die Winkelgeschwindigkeitsverteilung der rotierenden Objekte ergibt sich aus (112). Da nach dem Abschluß der 2. Phase die Turbulenzelemente nicht mehr in einem homogenen Medium eingebettet sind, gilt deren Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_* < 4 \cdot 10^{13}$ sec als Anfangsbedingung einer späteren Entwicklung.

$$\Omega = \Omega_0 \frac{t_0^2}{t^2} \left[1 - exp\left(- \frac{t^2}{10^{28}} \right) \right]$$

Der prinzipielle Verlauf der Winkelgeschwindigkeit ist in der Figur 9 dargestellt.



FIGUR 9

Bei Berücksichtigung einer turbulenten Viskosität, wie schon oben angedeutet, müßte der innere starr rotierende Kern wesentlich größer sein. Im Zusammenhang mit der Klärung dieser Frage ist die Dichteverteilung interessant. Diese soll in erster Näherung bei Annahme einer ebenen Strömung bestimmt werden.
Für die Gleichung (25) folgt dann unter Beachtung von (52) und (113) das Gleichungssystem

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = - + \cdot \Omega^2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \qquad (119)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} \right] . \qquad (120)$$

Die Gleichung (120) ergibt die von Oseen bereits oben angebene Lösung (112). Da das Gravitationspotential ϕ Lösung der Gravitationsgleichung

$$\Delta \phi = - 4\pi \cdot G \cdot \rho \qquad (37)$$

ist, ergibt sich mit (119)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r \cdot \rho} \frac{dp}{dr} - \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dr} \frac{dp}{dr} = 2 \cdot \Omega^2 - 4\pi \cdot G \cdot \rho$$

Da das Universum nach dem Abschluß der 2. Phase noch homogen mit Strahlungsdichte erfüllt ist, soll der Strahlungsdruck bei dem inneren Druck der Turbulenzelemente unberücksichtigt bleiben. Da das ideale Gasgesetz (38) gelten soll, folgt

$$\frac{R}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \frac{dT}{dr} + R \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{R \cdot T}{\rho} \frac{d^2 \rho}{dr^2} + \frac{R}{r} \frac{dT}{dr} +$$

$$+ \frac{R \cdot T}{r \cdot \rho} \frac{d\rho}{dr} - \frac{R \cdot T}{\rho^2} \left(\frac{d\rho}{dr} \right)^2 = 2 \cdot \Omega^2 - 4\pi \cdot G \cdot \rho \; . \qquad (121)$$

Ich verwende weiterhin die Differentialgleichung (39), die bei dem hier gegebenem ebenen Problem in erster Näherung lautet

$$\frac{3 \cdot \rho}{2 \cdot K} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2 \cdot K}{3 \cdot \rho} \Delta T \qquad (122)$$

mit $\alpha = \frac{2 \cdot K}{3 \cdot \rho}$ $\left[cm^2 \cdot sec^{-1} \right]$.

Die Wärmeleitfähigkeit K ergibt sich aus /48/ für ein vollständig ionisiertes Plasma (hier als Näherung für das Innere des Turbulenzelementes)

$$K = 1{,}1 \cdot 10^{-12} \frac{T^{5/2}}{\ln \Lambda} \quad \frac{cal}{sec \cdot cm \cdot grad}$$

Die Anfangs- und Randbedingungen für (122) seien derart angenommen, daß zum Zeitpunkt $t_* = 0$ die Temperaturverteilung im Turbulenzelement vorgegeben sei mit

$$T(r,0) = g(r),$$

und weiterhin am Rand $r = r_0 = 10^{20}$ cm eine konstante Temperatur herrschen soll

$$T_0 = T(r_0,t) = 4 \cdot 10^3 \ {}^0K.$$

Als Lösung der Differentialgleichung (122) erhalte ich bei Annahme von α = const. die Lösung /49/

$$T - T_0 + \frac{2}{r_0^2} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_\nu \frac{r}{r_0})}{J_1^2(\lambda_\nu)} e^{-\frac{\alpha \cdot \lambda_\nu^2}{r_0^2} t} \int_0^{r_0} g(r) \cdot J_0(\lambda_\nu \frac{r}{r_0}) r \cdot dr. \quad (123)$$

Hierin sind λ_ν die Nullstellen der Besselfunktion /50/

$$I_0(\lambda_\nu) = 0. \qquad \nu = 1,2,\ldots.$$

Das Abklingen der vorgegebenen Temperaturverteilung wird bestimmt durch die Exponentialfunktion in (123). Hierin ist

$$\frac{\alpha \cdot \lambda_\nu^2}{r_0^2} > \frac{\alpha \cdot \lambda_1^2}{r_0^2} = 10^{-23}.$$

Innerhalb einer Zeit von 10^{13} sec kann somit durch Wärmeleitung keine entscheidende Veränderung der vorgegebenen Temperaturverteilung eintreten. Konvektion soll unberücksichtigt bleiben.
Für (121) erhalte ich dann bei Berücksichtigung von (122) und $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ die Gleichung

$$\frac{R \cdot T}{\rho} \frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{R}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \left[\frac{T}{r} + \frac{dT}{dr} \right] - \frac{R \cdot T}{\rho^2} \left(\frac{d\rho}{dr} \right)^2 = \quad (124)$$

$$= -2 \cdot \Omega^2 - 4\pi \cdot G \cdot \rho$$

Im Zusammenhang mit der Lösung der Gleichung (122) war die Annahme gemacht worden, daß α = const. ist. Diese physikalisch sinnvolle Annahme, einer praktisch konstanten Viskosität entsprechend, führt bei Verwendung der

Randbedingung

$$\rho_0 = \rho\,(r = r_0,\ T = T_0) = 2\cdot10^{-21}\ g\cdot cm^{-3}$$

zu den Beziehungen

$$\rho = 2\cdot10^{-30}\cdot T^{5/2} \qquad (125)$$

$$T = 7{,}6\cdot10^{11}\cdot\rho^{2/5}. \qquad (126)$$

Unter Verwendung von (122) und (126) erhalte ich dann für (124) das Resultat

$$\rho = \frac{\Omega^2}{2\pi\cdot G}\ , \qquad (127)$$

da sich sämtliche Ableitungen der linken Seite der Gleichung (124) gegenseitig aufheben.
Da am Rand $r = r_0$ die Dichte

$$\rho_0 = \frac{\Omega_0^2}{2\pi\cdot G} = 2\cdot10^{-21}\quad [g\cdot cm^{-3}]$$

ist, ergibt sich für

$$\Omega_0 = 2{,}19\cdot10^{-14}\ sec^{-1} \qquad (128)$$

bzw. für die Periodendauer

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 2{,}61\cdot10^{14}\ sec = 6{,}92\cdot10^{6}\ a.$$

Das entspräche nach (126) einer Temperatur von $1{,}6\cdot10^{13}\ ^oK$ für den inneren Kern, da sich die Dichte des inneren Kerns $r \ll 10^{14}$ cm ergibt zu

$$\rho = \frac{\Omega_0^4\cdot r_0^4}{10^{56}\cdot 2\pi\cdot G} = 2{,}03\cdot10^{3}\quad [g\cdot cm^{-3}].$$

Bei entsprechender Berücksichtigung einer turbulenten Viskosität (ungefähr Faktor 10^5) ergäbe sich eine Kerndichte von $2{,}03\cdot10^{-7}\ g\cdot cm^{-3}$ mit einer Temperatur von $1{,}6\cdot10^{9}\ ^oK$.
Dieses Ergebnis zeigt, daß die hier gemachten Überlegungen aus zweierlei Gründen nur Näherungen sind. Erstens wurde in (119) der Strahlungsdruck nicht berücksichtigt, was

notwendig wäre, wenn sich eine derart große Strahlungsdichte im Kern ergibt. Zweitens ist die Vernachlässigung radialer Geschwindigkeitskomponenten im Bereich der Kernfusionen nicht korrekt, Als Näherung erweist sich damit auch die Annahme eines konstanten α, d.h. konstanter Viskosität, da bei derartigen Temperaturen neben der kinematischen Viskosität auch die Strahlungsviskosität eine bedeutende Rolle spielt. Hinzu kommt noch, daß neben der Wärmeleitung die Strahlung selbst für einen Temperaturausgleich sorgt. Gerade dieses Argument bei Berücksichtigung einer starken Kopplung von Strahlung und Materie im Kern lassen es bei diesen Werten unwahrscheinlich erscheinen, daß überhaupt derartig große Werte im Kern erreicht werden können. Letztlich kommt noch hinzu, daß entsprechend dem hier betrachteten Zeitpunkt nach der 2. Phase die Zeit t_* in der Gleichung (112) mit einem größeren Wert einzusetzen ist.
Diese Einflüsse lassen sich in geeigneter Weise in der Funktion für die Winkelgeschwindigkeit zusammenfassen.
Da ich über den Anteil der einzelnen Einflüsse bei dieser Korrektur keine genaue Aussage treffen kann, soll die Korrektur so erfolgen, daß sich die zu beobachtende Gesamtmasse von $2 \cdot 10^{44}$ g ergibt. Diese Anpassung erfolgt über

$$M = \int \rho \, dV = \frac{1}{2\pi \cdot G} \int \Omega^2 \, dV = 2 \cdot 10^{44} \, g \, .$$

Damit erhalte ich für (112) die jetzt zu verwendende Gleichung

$$\Omega = \Omega_0 \frac{t_0^2}{t^2} \left[1 - \exp\left(- \frac{t^2}{10^{36}} \right) \right] . \qquad (129)$$

Für den inneren Kern ergeben sich damit für die Dichte (127)

$$\rho_i = \frac{\Omega_0^4 \cdot t_0^4}{10^{72} \cdot 2\pi \cdot G} = 2{,}03 \cdot 10^{-13} \; [g \cdot cm^{-3}]$$

und für die Temperatur (126)

$$T_i = 6{,}35 \cdot 10^6 \; ^\circ K .$$

Die Winkelgeschwindigkeit des konstant rotierenden Kerns ist

$$\Omega_i = \frac{\Omega_0 \cdot r_0^2}{10^{36}} = 2{,}91 \cdot 10^{-10} \quad sec^{-1}$$

mit der Periodendauer

$$T_i = 6{,}92 \cdot 10^{2} \; a \; .$$

Die Näherung (113) bleibt weiterhin als Näherung erhalten; es werden die zu diesem Ergebnis führenden Überlegungen auch realistischer.
Bezüglich einer weiteren Entwicklung des so charakterisierten Turbulenzgebietes soll dessen Stabilität untersucht werden. Dies ist erforderlich, da über dessen Entwicklung keine direkte Aussage gemacht werden kann. Es soll daher über das Instabilitätsverhalten indirekt auf dessen Entwicklung geschlossen werden.
Zunächst betrachte ich eine Störung in der radialen Richtung. Dann gilt für alle Störungsgrößen

$$e^{i(\omega \cdot t - k \cdot r)} \longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} = i \cdot \omega \quad und \quad \frac{\partial}{\partial r} = -i \cdot k \; .$$

Da das Magnetfeld noch vernachlässigbar sein soll, erhalte ich aus den Gleichungen (57) bis (61) die Gleichungen:

$$u_r \left(\frac{\varrho}{r} - i \cdot k \cdot \varrho + \frac{\partial \varrho}{\partial r} \right) + u_z \frac{\partial \varrho}{\partial z} + i \cdot \omega \cdot \delta\varrho = 0$$

$$4\pi \cdot G \cdot \delta\varrho + \delta\phi \left(k^2 + i \frac{k}{r} \right) = 0$$

$$u_r \left(i \cdot \omega + \frac{4}{3} \nu \left[k^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{i \cdot k}{r} \right] \right) - 2 \cdot \Omega \cdot u_\varphi - i \cdot k \cdot \delta\phi -$$

$$- \delta\varrho \left(i \cdot k \frac{a^2}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0$$

$$u_r\left(r\frac{\partial\Omega}{\partial r}+2\cdot\Omega\right)+u_\varphi\left(i\cdot\omega+\nu\left[k^2+\frac{1}{r^2}+\frac{i\cdot k}{r}\right]\right)+$$

$$+u_z\cdot r\frac{\partial\Omega}{\partial z}+\delta\varphi\frac{\nu}{\varrho}\left(+\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}+3\frac{\partial\Omega}{\partial r}+r\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}\right)=0$$

$$u_z\left(i\cdot\omega+\nu\cdot k^2+i\cdot\nu\frac{k}{r}\right)-\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial p}{\partial z}\delta\varrho=0$$

Führe ich die Substitution $\omega = -i\cdot\alpha$ durch, so ergeben diese Gleichungen nach der Trennung von Real- und Imaginärteil die charakteristischen Gleichungen. Da nur Störungen in der z_0 - Ebene betrachtet werden sollen, setze ich

$$\frac{\partial\varrho}{\partial z}=\frac{\partial\Omega}{\partial z}=0\ .$$

Weiterhin verwende ich das Ergebnis (113). Als Abkürzungen sind eingeführt

$$F=\frac{\nu^2}{r^2}$$

$$\Omega'_*=r^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}+3\cdot r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\ .$$

Da den sechs unbekannten Störungsgrößen nur fünf Gleichungen gegenüberstehen, verwende ich als weitere Beziehung die Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial r}=a^2\frac{\partial\varrho}{\partial r}\ .$$

Die sich aus dem Real- und Imaginärteil ergebenden charakteristischen Gleichungen lauten dann:

$$\alpha^4+\alpha^3\cdot F\left\{\frac{7}{3}+\frac{20}{3}k^2\cdot r^2\right\}+\alpha^2\left\{a^2\cdot k^2\left(1-\frac{r}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial r}\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{a^2}{r^2}\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}+\Omega_3^2\right)\cdot\left(1+\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)+F^2\left(\frac{4}{3}+\right.$$

$$\left.+\frac{19}{3}k^2r^2+\frac{28}{3}k^4r^4\right)\Big\}+\alpha\cdot F\Big\{\left(1+\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)\cdot$$

$$\cdot\Big[\Omega_3^2\left(1+2\cdot k^2r^2\right)-2\cdot\Omega\cdot\Omega_R'+a^2k^2\left(\frac{1}{k^2r^2}\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}+\right.$$

$$\left.+4\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}-1\right)\Big]+\frac{8}{3}F^2k^4r^4\left(1+2\cdot k^2r^2\right)+\qquad(130)$$

$$+2\cdot k^2r^2\left(\Omega\cdot\Omega_R'+\Omega_3^2\right)+2\cdot k^2a^2k^2r^2\left(1-\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)\Big\}+$$

$$+F^2\Big\{\left(1+2\cdot k^2r^2\right)\cdot\left(\Omega_3^2\cdot k^2r^2-2\cdot a^2k^2\right)-2\cdot\Omega_R'\cdot\Omega\cdot$$

$$\cdot\left(1+k^4r^4\right)+a^2k^2r^4k^4\left(1-\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)+\left(1+\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(3\cdot a^2k^2r^2k^2\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}+a^2k^2\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}+\Omega_3^2\cdot k^4r^4\right)\Big\}=0$$

$$\alpha^4+\alpha^3\cdot F\left\{2\cdot k^2r^2+\frac{4}{3}k\cdot r-1\right\}+\alpha^2\Big\{\Omega_3^2-\frac{a^2}{r^2}\left(1-\right.$$

$$\left.-\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}-\left(\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)^2\right)+F^2k^4r^4+F^2\left(1+2\cdot k^2r^2\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{4}{3}k\cdot r-\frac{11}{3}\right)\Big\}+\alpha\cdot F\Big\{\Omega_3^2\left(1+2\cdot k^2r^2\right)-2\left(1+\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\Omega_3^2+\frac{k^2a^2}{k^3r^3}\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)-2\cdot\Omega\cdot\Omega_R'\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}-2\cdot k^2a^2\left(1-\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)-$$

$$-\frac{a^2}{r^2}\left(1+2\cdot k^2\cdot r^2\right)\cdot\left(1-\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}-\left(\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)^2\right)+\frac{4}{3}F^2\left[k^5 r^5-\right.$$

$$\left.-\left(1+2\cdot k^2\cdot r^2\right)^2\right]\Big\}+F^2\Big\{\Omega_z^2\cdot k^4 r^4-\left(1+k^2 r^2\right)\cdot\left(1+\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\Omega_z^2+\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}\frac{a^2\cdot k^2}{k^3\cdot r^3}\right)-4\cdot\Omega\cdot\Omega_*'\cdot k^2\cdot r^2+ \qquad (131)$$

$$+2\cdot\Omega\cdot\Omega_*'\left(1-k^2 r^2\right)\cdot\left(1+\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)-k^2 a^2\left(1+k^2 r^2\right)\cdot\left(1-\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)-$$

$$-k^2 r^2\cdot k^2 a^2\left(1-\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}-\left(\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)^2\right)\Big\}=0$$

Ohne die Näherung (113), aber bei Vernachlässigung der Viskosität und des Dichtegradienten reduzieren sich der Real- und Imaginärteil der charakteristischen Gleichungen bei Anwendung von (71) auf die Stabilitätsbedingungen :

$$2\cdot\Omega\left(r\frac{\partial\Omega}{\partial r}+2\cdot\Omega\right)+a^2\cdot k^2+\Omega_z^2>0$$

$$2\cdot\Omega\left(r\frac{\partial\Omega}{\partial r}+2\cdot\Omega\right)-\frac{a^2\cdot k^2}{k^2\cdot r^2}+\Omega_z^2>0\,.$$

Die erste Bedingung entspricht dem bereits von R. Ebert /28/ angegebenem Resultat (46). Die zweite Bedingung ergibt bei Verwendung von (113) und (127) die Bedingung

$$\lambda<\lambda_r=\frac{2\cdot\pi\cdot r}{\sqrt{1+2\frac{v_z^2}{a^2}}}\,.$$

Die Aussage ist somit, daß sich das System gegenüber langwelligen Störungen instabil verhält.
Auch ohne Vernachlässigung der Viskosität und des Dichtegradienten zeigt es sich, daß langwellige Störungen zur Instabilität führen. Bei Anwendung des Kriteriums (70) auf den Koeffizienten zu α^3 der charakteristischen Gleichung (131) ergibt sich als Stabilitätskriterium :

$$2\cdot k^2 r^2 + \frac{4}{3} k\cdot r - 1 > 0 ,$$

woraus sich ergibt:

$$k\cdot r > 0{,}45. \qquad (132)$$

Für Störungswellenlängen, die diese Bedingung verletzen, ist somit eine Untersuchung der charakteristischen Gleichungen nicht mehr erforderlich.
Es sollen jetzt die zur Untersuchung benötigten Gleichungen zusammengestellt werden.
Für die Winkelgeschwindigkeit (129) ergibt sich mit (128) und $r_o = 10^{20}$ cm die Gleichung

$$\Omega = 2{,}19\cdot 10^{26} \frac{1}{r^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{10^{36}}\right)\right] . \qquad (133)$$

Für die Dichte (127) ergibt sich

$$\rho = 2{,}38\cdot 10^{6}\cdot \Omega^2 . \qquad (134)$$

Weiterhin ergibt sich für den Dichtegradienten aus (133) und (134)

$$\left|\frac{r}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r}\right| = 4\left\{1 + \frac{\frac{r^2}{10^{36}}}{1 - \exp\frac{r^2}{10^{36}}}\right\} , \qquad (135)$$

wenn ich $\frac{\partial \rho}{\partial r} < 0$ als physikalisch sinnvoll voraussetze.
Für den Winkelgeschwindigkeitsgradienten erhalte ich mit (133)

$$\Omega_*' = -\,8{,}76\cdot 10^{-10} \frac{r^2}{10^{36}} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{10^{36}}\right) . \qquad (136)$$

Die Schallgeschwindigkeit errechnet sich mit (38) und (126) aus

$$a^2 = 1{,}77\cdot 10^{20} \cdot \rho^{2/5} . \qquad (137)$$

Das Jeanssche Moment ist

$$\Omega_J^2 = k^2 a^2 - 8{,}38\cdot 10^{-7}\cdot \rho \qquad (138)$$

und das Viskositätsmoment

$$F = \frac{1{,}25 \cdot 10^{15}}{+^{2} \cdot \ln \Lambda} \quad , \qquad (139)$$

wobei

$$\Lambda = 1{,}063 \cdot 10^{25} \cdot \varrho^{1/10} \quad . \qquad (140)$$

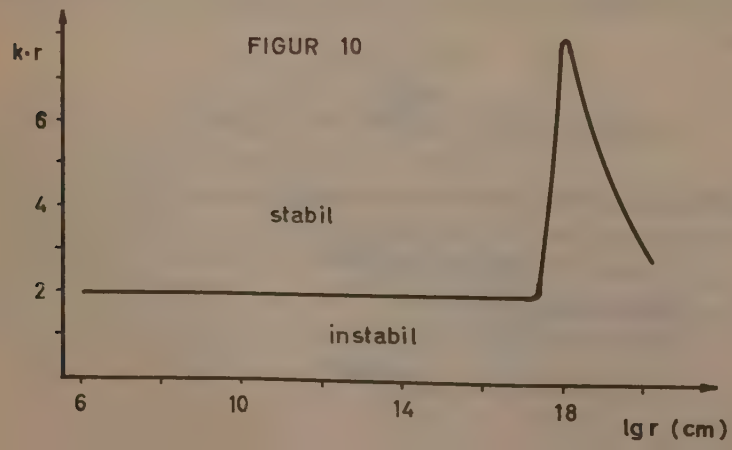
Die Gleichungen (130) und (131) wurden unter Verwendung der Gleichungen (132) bis (140) in einem Rechenprogramm auf der ZUSE Z 23 auf ihre Stabilität entsprechend den Bedingungen (70) und (71) untersucht.
Die Ergebnisse sind in den Figuren 10 und 11 zusammenfassend dargestellt.worden. Entscheidend für die Beurteilung der Stabilität war immer, daß keines der nach (70) und (71) möglichen vierzehn Kriterien verletzt wurde.
Die Rechnung zeigte nun, daß für die Abgrenzung der Instabilitätsgebiete bestimmend ist die charakteristische Gleichung (131). Entsprechend in dieser Gleichung (131) dann nach (70) die Verletzung der Bedingungen

$$a_3 > 0 \qquad a_4 > 0,$$

und nach (71) die Verletzung der Bedingungen

$$\Delta_3 > 0 \qquad \Delta_4 > 0 .$$

In der Figur 10 ist dieses Instabilitätsgebiet graphisch dargestellt.



Die Rechnung zeigte somit, daß statt (132) innerhalb des starr rotierenden Kerns das Stabilitätskriterium

$$k \cdot r > 2 \qquad (141)$$

zu verwenden ist. Außerhalb des starr rotierenden Kerns zeigt sich ein stark vom Radius abhängiges Verhalten. Das Übergangsgebiet vom starr rotierenden Kern zur differentiell rotierenden Hülle soll daher in der Figur 11 noch einmal besonders hervorgehoben werden.

Von besonderem Interesse ist der Instabilitätsbereich $k \cdot r > 6{,}28$, da dort die Störungswellenlänge in die Größenordnung des Instabilitätsgebietes gelangt. Es muß noch geklärt werden, wie diese Instabilität zu deuten ist. Hierzu definiere ich

$$\Omega_a = \frac{a}{r} \qquad (142)$$

und bilde dann das Verhältnis

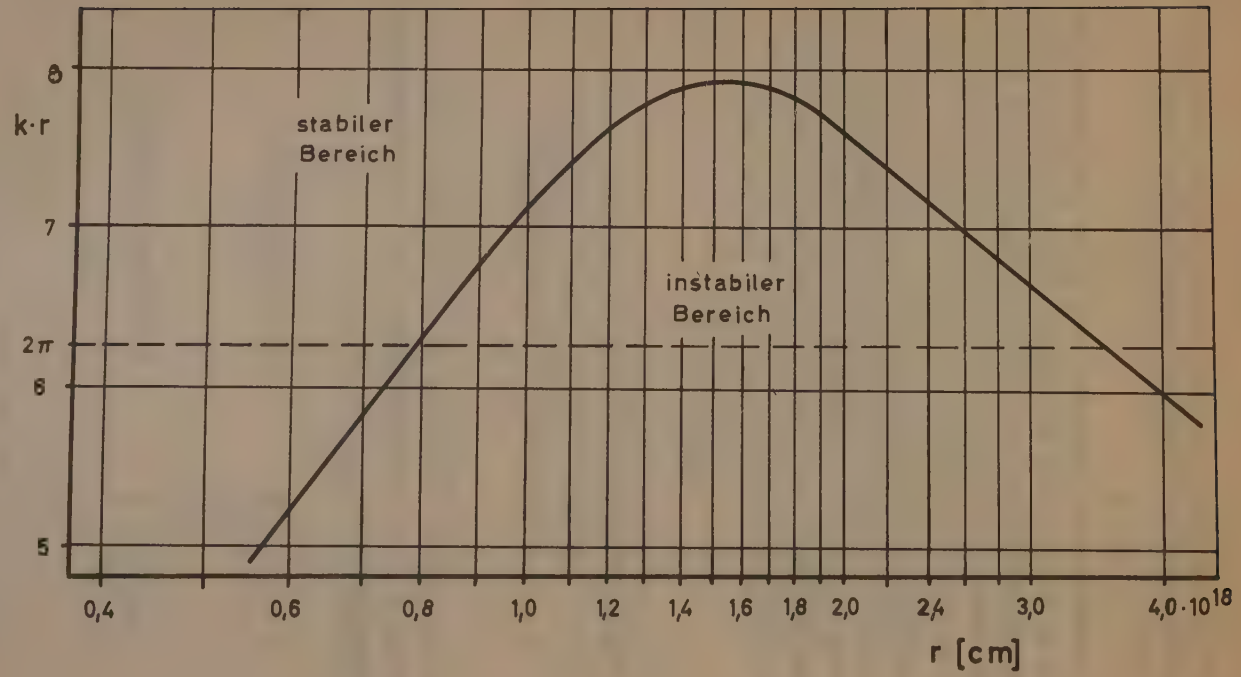
$$\frac{\Omega}{\Omega_a} = 2{,}55 \cdot 10^{4} \cdot r^{-7/5} \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi^2}{10^{26}} \right) \right]^{3/5}, \qquad (143)$$

wobei ich (133), (134) und (137) verwendet habe. Dieses Verhältnis (143) charakterisiert nun die Strömung in der folgenden Weise:

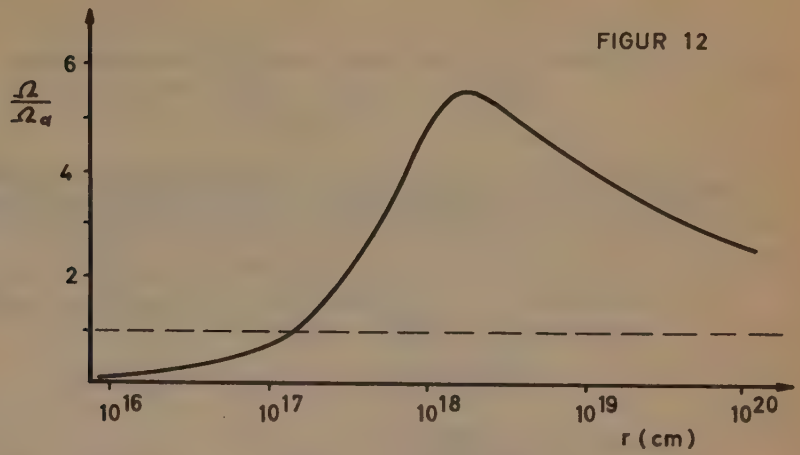
$\frac{\Omega}{\Omega_a} > 1$ Überschallströmung

$\frac{\Omega}{\Omega_a} < 1$ Unterschallströmung .

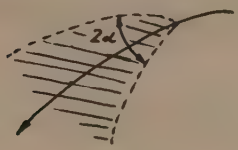
Figur 11


8
k·r
7
2π
6
5
stabiler
Bereich
instabiler
Bereich
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
2,4
3,0
4,0·10^18
r [cm]

In der Figur 12 ist das durch (143) gegebene Verhältnis dargestellt in Abhängigkeit vom Radius.



Ein Vergleich der Figuren 11 und 12 zeigt, daß der Instabilitätsbereich mit dem Bereich größter Überschallströmung zusammenfällt. In diesem Bereich kann sich eine Störung nur in einem in Strömungsrichtung geöffnetem Kegel ausbreiten.



$$\sin\alpha = \frac{\Omega_a}{\Omega}$$

d.h. $\alpha \geq 10°$.

Eine Störung kann sich damit auch nur in einem beschränkten Gebiet auswirken. Die Störung wird hierbei eng mit der Stromdichte gekoppelt sein, die mit wachsendem Verhältnis $\frac{\Omega}{\Omega_a} > 1$ abnimmt.

In dem Instabilitätsgebiet wird es somit zu einer Verringerung der Dichte kommen, da die Stromlinien auseinanderrücken.

Vor einer abschließenden Diskussion dieser Entwicklungsphase muß noch eine Störung in der z-Richtung

$$\sim e^{i(\omega \cdot t - k \cdot z)}$$

untersucht werden. Es gilt dann für alle Störungsgrößen

$$\frac{\partial}{\partial t} = i \cdot \omega \qquad \frac{\partial}{\partial z} = - i \cdot k \ .$$

Da das Magnetfeld in dieser Phase vernachlässigbar sein soll, erhalte ich aus den Gleichungen (57) bis (61) die Gleichungen

$$i \cdot \omega \cdot \delta\rho + u_r \left(\frac{\rho}{r} + \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) - u_z \left(i \cdot k \cdot \rho - \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = 0$$

$$4\pi \cdot G \cdot \delta\rho + k^2 \cdot \delta\phi = 0$$

$$\frac{a^2}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial r} \delta\rho - u_r \left(\nu \cdot k^2 + \frac{4}{3} \frac{\nu}{r^2} + i\omega \right) + 2 \cdot \Omega \cdot u_\varphi = 0$$

$$\frac{\nu^2}{\rho \cdot r} \Omega_* \cdot \delta\rho + u_r \left(2 \cdot \Omega + r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + u_\varphi \left(i \cdot \omega + \frac{\nu}{r^2} + \nu \cdot k^2 \right) + r \frac{\partial \Omega}{\partial z} u_z = 0$$

$$i \cdot k \cdot \delta\phi + \delta\rho \left(\frac{i \cdot k}{\rho} a^2 + \frac{a^2}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) - \frac{i}{3} \frac{k \cdot \nu}{r} u_r - u_z \left(\frac{4}{3} \nu \cdot k^2 + i \cdot \omega \right) = 0$$

Verwendet wurde die Gleichung

$$\delta p = a^2 \cdot \delta \varrho$$

und die Abkürzung

$$\Omega_* = r^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + 3 \cdot r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \; .$$

Führe ich die Substitution $\omega = -i \cdot \alpha$ durch, so ergeben diese Gleichungen nach der Trennung von Real- und Imaginärteil die charakteristischen Gleichungen. Da nur Störungen in Richtung der Drehachse interessant sind, sind die charakteristischen Gleichungen auf $r = 0$ reduziert.

$$\alpha^2 + \alpha \frac{\nu}{3} \left\{ k^2 - \frac{1}{a^2} \Omega_3^2 \right\} + \left\{ \frac{a^2}{z^2} \left(\frac{z}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial z} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \Omega_3^2 \left(2 - \frac{1}{k^2 a^2} \Omega_3^2 + \frac{1}{4} \frac{z}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial z} \right) \right\} = 0 \qquad (144)$$

$$\alpha^3 \left\{ \frac{1}{3} \nu \cdot k^2 \right\} + \alpha^2 \left\{ \Omega_3^2 \right\} + \alpha \left\{ \frac{1}{3} \nu \cdot k^2 \left[\Omega_3^2 + \frac{a^2}{z^2} \left(\frac{z}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} +$$

$$+ \left\{ a^2 \cdot k^2 \frac{a^2}{z^2} \left(\frac{z}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial z} \right)^2 + \Omega_3^4 \right\} = 0 \qquad (145)$$

Die Anwendung von (71) auf (145) führt auf

$$\Omega_3^2 \left\{ \frac{1}{3} \nu \cdot k^2 \left[\frac{a^2}{z^2} \left(\frac{z}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial z} \right)^2 + \Omega_3^2 \right] \right\} -$$

$$- \frac{1}{3} \nu \cdot k^2 \left\{ a^2 \cdot k^2 \frac{a^2}{z^2} \left(\frac{z}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial z} \right)^2 + \Omega_3^4 \right\} > 0 \; ,$$

bzw.

$$\Omega_3^2 - a^2 \cdot k^2 = -4\pi \cdot G \cdot \varrho > 0 \; ,$$

also einer Stabilitätsforderung, die niemals erfüllt werden kann. Es verhält sich somit das Plasmasystem längs der

Drehachse instabil. Welcher Art diese Instabilität ist, läßt sich durch Vergleich der Gravitationsenergie und der thermischen Energie abschätzen, da längs der z-Achse diese beiden Energien dominierend sind.

Im Abstand $z_o = 1{,}3 \cdot 10^{20}$ cm ergibt sich:

$$E_T = \frac{1}{2} k \cdot T_o = \frac{1}{2} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-16} \cdot 4 \cdot 10^3$$

$$= 2{,}76 \cdot 10^{-13} \text{ erg}$$

$$E_G = \frac{G \cdot M}{z_o} m_H = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{44}}{1{,}3 \cdot 10^{20}} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-24}$$

$$= 1{,}71 \cdot 10^{-8} \text{ erg} .$$

Es überwiegt somit der Gravitationseffekt, und es wird zur Kontraktion kommen.

Im Kerngebiet bei z.B. $z = 10^{17}$ cm ergibt sich:

$$E_T = \frac{1}{2} k \cdot T = \frac{1}{2} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-16} \cdot 6{,}35 \cdot 10^6$$

$$= 4{,}38 \cdot 10^{-10} \text{ erg}$$

$$E_G = \frac{G \cdot M_z}{z} \cdot m_p = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 4\pi \cdot 10^{51} \cdot 2{,}03 \cdot 10^{-13} \cdot 1{,}67}{3 \cdot 10^{17} \cdot 10^{24}}$$

$$= 9{,}48 \cdot 10^{-10} \text{ erg} .$$

Auch hier überwiegt noch der Gravitationseffekt, so daß insgesamt eine Abflachung des Systems in der z-Richtung die Folge sein wird.

Das Verhalten während dieser Entwicklungsphase kann charakterisiert werden durch eine Abplattung längs der Drehachse und durch ein schmales instabiles Überschallgebiet zwischen dem starr rotierenden Kern und der differentiell rotierenden Hülle.

Entsprechend der radialen Kontraktion der Seitenflächen, also in z-Richtung, kommt es zu einer Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit des Kerngebietes, da der Drehimpulserhaltungssatz dies fordert.
Im nächsten Kapitel soll die weitere Entwicklung im Zusammenwirken mit dem Magnetfeld untersucht werden.

12. Einfluß eines Magnetfeldes auf die Entwicklung des Plasmasystems

Sämtliche in den vorherigen Kapiteln durchgeführten Untersuchungen geschahen unter Vernachlässigung des Magnetfeldes. Diese Annahme kann solange keine echte Begründung finden, als über die Entstehung des kosmischen Magnetfeldes nichts bekannt ist. Alle bisherigen Versuche im Rahmen eines beliebigen kosmischen Modells brachten keine Klärung dieser Problematik. Als einzige mögliche Begründung verbleibt somit die Kenntnis der Magnetfeldstärke des interstellaren Raumes, wie sie aus Messungen gewonnen wurde.

$$B(\text{interstellar}) = 10^{-5}\ \text{Gauß}$$

Bei den bereits durchgeführten Rechnungen mußte die Magnetfeldenergie

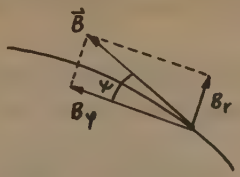
$$E_{mag} \ll 10^{-10}\ \text{erg}$$

sein, um ohne Einfluß auf die dynamische Entwicklung des Systems zu sein. Dies entspricht einer Feldstärke von

$$B \ll 10^{-5}\left(\frac{4\pi \cdot \varrho(+)}{m_p}\right)^{1/2} = 10^{-3}\ \text{Gauß}\ .$$

Da über den Entstehungsmechanismus des Magnetfeldes nichts bekannt ist, kann nun allerdings die Frage nicht beantwortet werden, ob im Zusammenhang mit der Expansion des Kosmos die magnetische Energiedichte einer Veränderung unterworden ist. Lasse ich diese Frage für den intergalaktischen Raum offen, verneine ich sie aber für das galaktische Objekt, betrachte das Magnetfeld auch als eingefroren, so muß ein Vergleich der Abschätzung mit dem gemessenen interstellaren Magnetfeld als Begründung für dessen bisherige Vernachlässigung dienen. Erst die dynamische Entwicklung des galaktischen Objektes selbst führt zu einer größeren Magnetfeldenergiedichte und so zu deren Einflußnahme auf die fernere dynamische Entwicklung.
Die Möglichkeit der Verstärkung des Magnetfeldes liegt in der Rotation des Systems begründet. Da das Magnetfeld in das Plasma eingefroren ist, wird es durch die Rotation in der differentiell rotierenden Hülle aufgewickelt.

Es muß noch kurz der mögliche Einfluß auf die dynamische Entwicklung diskutiert werden.



$$B_z \simeq 0 \qquad B = \sqrt{B_r^2 + B_\varphi^2} \qquad B_r = B_\varphi \cdot \tan\Psi$$

Die elektromagnetische Kraft errechnet sich unter Verwendung von (23) und (33).

$$\left.\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{1}{c}\,\vec{j} \times \vec{B} \\ \nabla \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\,\vec{j} \end{aligned}\right\} \qquad 4\pi \cdot \vec{F} = (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}$$

$$4\pi \cdot F_r = - B_\varphi \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - \frac{B_\varphi^2}{r}$$

$$4\pi \cdot F_\varphi = - \frac{B_r \cdot B_\varphi}{r} + B_r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r}$$

$$4\pi \cdot F_z = - B_\varphi \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} - B_r \frac{\partial B_r}{\partial z} \quad .$$

Beim Aufwickeln des Magnetfeldes werden bezüglich einer möglichen Auswirkung die Komponente B_φ und der Winkel Ψ interessant sein. Es ergibt sich:

$$4\pi \cdot F_r = - B_\varphi \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - \frac{B_\varphi^2}{r} \qquad (146)$$

$$4\pi \cdot F_\varphi = - \frac{B_\varphi^2}{r} \tan\Psi + B_\varphi \cdot \tan\Psi \cdot \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \qquad (147)$$

$$4\pi \cdot F_z = - B_\varphi \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} - B_\varphi \cdot \tan^2\Psi \cdot \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} - B_\varphi \frac{\tan\Psi}{\cos^2\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (148)$$

Von Interesse ist der Bereich, in dem infolge des Aufwickelns des Magnetfeldes $\tan\Psi = 0$ ist. Dort ergibt sich

$$4\pi \cdot F_r = - B_\varphi \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - \frac{B_\varphi^2}{r}$$

$$4\pi \cdot F_z = - B_\varphi \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} .$$

Entsprechend der Kontraktion in z-Richtung wird der Magnetfeldgradient

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} < 0$$

negativ sein. Die elektromagnetische Kraft F_z wirkt der Kontraktion entgegen.
In der r-Richtung dagegen muß man beachten, daß $\tan\Psi = 0$ im Übergangsbereich zwischen dem starr rotierenden Kern und der differentiell rotierenden Hülle liegt. Dort liegt auch das Instabilitätsgebiet.
Im Bereich Kern-Instabilitätsgebiet ist der Magnetfeldgradient positiv

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} > 0$$

und im Bereich Instabilitätsgebiet-Hülle ist der Magnetfeldgradient negativ

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} < 0 .$$

Die elektromagnetische Kraft F_r verstärkt somit die Tendenz des instabilen Überschallgebietes zur Expansion.
Da die äußere Hülle schwach instabil bezüglich Kontraktion ist, wirkt der Kontraktion bei

$$- B_\varphi \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} > \frac{B_\varphi^2}{r}$$

die elektromagnetische Kraft F_r entgegen. Dagegen wird bei

$$- B_\varphi \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} < \frac{B_\varphi^2}{r}$$

die Kontraktion der Hülle begünstigt.
Das Kerngebiet wird durch die elektromagnetische Kraft F_r zur Kontraktion veranlaßt. Es würde somit Materie in das Kerngebiet einströmen. Dem Drehimpulserhaltungssatz entsprechend, bedeutete das aber eine Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit verbunden mit einer Verkleinerung des starr rotierenden Kerns. Der Kontraktionskraft stände dann konkurrierend eine vergrößerte Zentrifugalkraft gegenüber. Diese Betrachtung läßt sich durch folgende Überlegung ergänzen.
Im Gebiet mit vernachlässigbarer z-Komponente des Magnetfeldes ergibt sich aus $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (30)

$$\frac{\partial B_r}{\partial r} = - \frac{B_r}{r}$$

$$\tan\Psi \cdot \left\{ \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} + \frac{B_\varphi}{r} \right\} = - \frac{B_\varphi}{\cos^2\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad . \qquad (149)$$

Bei $\tan\Psi = 0$ folgt somit $\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$. Bei $\tan\Psi \neq 0$ ergibt sich ebenfalls $\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$, wenn

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} = - \frac{B_\varphi}{r} \quad .$$

Diese Möglichkeit kann nur in der Hülle verwirklicht sein, da dort $\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} < 0$. In diesem Falle wären $F_r = F_\varphi = 0$, d.h. keine elektromagnetische Kraftkomponente in der Hülle in radialer und in tangentialer Richtung.
Im Übergangsgebiet Kern-Instabilitätsgebiet ergibt sich für (147) mit (149)

$$4\pi \cdot F_\varphi = - \frac{B_\varphi^2}{\cos^2\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad . \qquad (150)$$

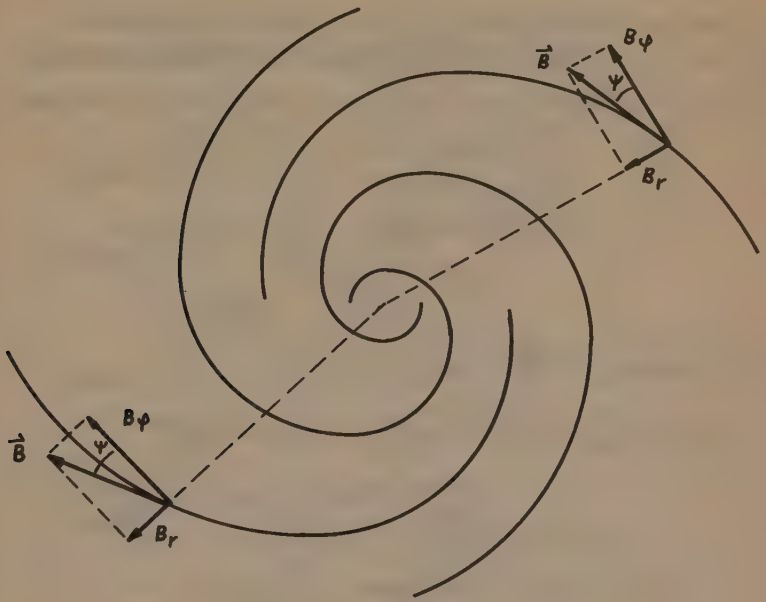
Da $\frac{\partial \Psi}{\partial r} < 0$ in diesem Bereich ist, ergibt sich eine tangential gerichtete Kraftkomponente. Im Instabilitätsbereich selbst ($\Psi = 0$) ist $\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$ und im starr rotierenden Kern

($\psi = \frac{\pi}{2}$) $F_\varphi = 0$, d.h. $B_\varphi = 0$ und $\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} = 0$.

Im Übergangsbereich wird somit die elektromagnetische Tangentialkraft ihr Maximum haben und je nach der Drehrichtung des Systems hemmend oder beschleunigend wirken. Beim Aufwickeln des Magnetfeldes wirkt diese Kraft immer hemmend. Damit wird die Zentrifugalkraft teilweise kompensiert, so daß die Kontraktion des Kerngebietes in r-Richtung möglich wird bei ständiger Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit. Dies wiederum ist verbunden mit einer wachsenden magnetischen Feldstärke. Entsprechend der damit wachsenden magnetischen Energiedichte, wird das Magnetfeld einen immer bedeutenderen Einfluß auf die dynamische Entwicklung gewinnen. Dies läßt sich ebenfalls wieder über eine Stabilitätsrechnung untersuchen, die im nächsten Kapitel durchgeführt wird.

13. Instabilität des Plasmas mit Magnetfeld

Es sollen die Stabilitätsbedingungen für ein Plasma mit Magnetfeld abgeleitet werden. Hierbei werde ich die Gradienten der Dichte und des Druckes vernachlässigen. Dies kann bei der weiteren Untersuchung unterstellt werden, da zum einen Zentrifugalkräfte und zum anderen magnetische Kräfte der Gravitationskraft gegenüberstehen. Die thermischen Kräfte spielen keine so bedeutende Rolle und werden vernachlässigt.
Das Magnetfeld soll als eine sich räumlich öffnende Spirale angenommen werden. Dies entspricht einem Magnetfeld, das vom zentralen Kern ab-bzw. aufgewickelt wird.



Die z-Achse zeigt in die Papierebene hinein. Dann ist

$$B_r = B_\varphi \cdot \tan\Psi$$

und entsprechend (30) bei Rotationssymmetrie

$$\frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{B_r}{r} \quad . \qquad (151)$$

Allgemein gilt $\vec{B} = (B_r, B_\varphi, B_z)$

$$\vec{\Omega} = (0, 0, -\Omega) \, .$$

Ich untersuche zunächst eine Störung in der r-Richtung

$$e^{i(\omega \cdot t - k \cdot r)} \, .$$

Es gilt dann für alle Störungsgrößen

$$\frac{\partial}{\partial t} = i \cdot \omega \qquad \frac{\partial}{\partial r} = -i \cdot k \, .$$

Bei einer radialen Störung in der z_0-Ebene kann grundsätzlich $B_z = 0$ gesetzt werden. Für das Gleichungssystem (53) bis (61) ergeben sich dann die nachfolgenden Gleichungen.

$$\frac{b_r}{r} - i \cdot k \cdot b_r = 0 \qquad (152)$$

$$i \cdot \omega \cdot b_r = -u_z \frac{\partial B_r}{\partial z} \qquad (153)$$

$$b_r \left(-i \cdot k \cdot r \cdot \Omega + r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \Omega\right) + i \cdot \omega \cdot b_\varphi =$$
$$= u_r \left(i \cdot k \cdot B_\varphi - \frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right) + u_\varphi \left(\frac{\partial B_r}{\partial r} - i \cdot k \cdot B_r\right) - u_z \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \qquad (154)$$

$$i \cdot \omega \cdot b_z = u_z \left(\frac{\partial B_r}{\partial r} - i \cdot k \cdot B_r + \frac{B_r}{r}\right) \qquad (155)$$

$$i \cdot \omega \cdot \delta\rho + u_r \left(\frac{\rho}{r} - i \cdot k \cdot \rho\right) = 0 \qquad (156)$$

$$4\pi \cdot G \cdot \delta\rho + \delta\phi \left(k^2 + i \frac{k}{r}\right) = 0 \qquad (157)$$

$$u_r\left(i\cdot\omega\cdot\rho+\frac{4}{3}\mu\left[k^2+i\frac{k}{r}+\frac{1}{r^2}\right]\right)+2\cdot\rho\cdot\Omega\cdot u_\varphi=$$

$$=\rho\cdot i\cdot k\cdot\delta\phi+i\cdot k\cdot\delta p+\frac{\delta\rho}{4\pi\cdot\rho}\left(\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}B_\varphi+\frac{B_\varphi^2}{r}\right)+ \qquad (158)$$

$$+b_\varphi\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}+i\cdot k\cdot B_\varphi-2\,\frac{B_\varphi}{r}\right)+b_z\frac{1}{4\pi}\frac{\partial B_r}{\partial z}$$

$$-u_r\left(r\cdot\rho\frac{\partial\Omega}{\partial r}+2\cdot\rho\cdot\Omega\right)+u_\varphi\left(i\cdot\rho\cdot\omega+\mu\left[k^2+i\frac{k}{r}-\frac{1}{r^2}\right]\right)-$$

$$-r\cdot\rho\frac{\partial\Omega}{\partial z}u_z=b_r\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}+\frac{B_\varphi}{r}\right)+$$

$$+b_\varphi\frac{1}{4\pi}\left(\frac{B_r}{r}-i\cdot k\cdot B_r\right)+b_z\frac{1}{4\pi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}+ \qquad (159)$$

$$+\frac{\delta\rho}{\rho}\left\{\mu\left(r\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}+3\frac{\partial\Omega}{\partial r}+r\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}B_r-\frac{B_r\cdot B_\varphi}{r}\right)\right\}$$

$$u_z\left(i\cdot\rho\cdot\omega+k^2\mu+i\mu\frac{k}{r}\right)- \qquad (160)$$

$$=-b_r\frac{1}{4\pi}\frac{\partial B_r}{\partial z}-b_\varphi\frac{1}{4\pi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}-b_z\frac{1}{4\pi}i\cdot k\cdot B_r+$$

$$+\frac{\delta\rho}{4\pi\cdot\rho}\left(\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}B_\varphi+\frac{\partial B_r}{\partial z}B_r\right)$$

Da ich eine Störung in der z_0-Ebene untersuche, können die Gradienten des Magnetfeldes in der z - Richtung vernachlässigt werden.

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = 0$$

Damit ist mit $b_r = 0$ aus der Gleichung (152) die Gleichung (153) erfüllt. Desweiteren ergibt sich aus (155) und (160)

$$u_z \cdot \omega \left(i\cdot\omega + k^2\nu + i\cdot\nu \frac{k}{r} \right) = - u_z \cdot k \frac{B_r}{\rho} \left(\frac{\partial B_r}{\partial r} - i\cdot k \cdot B_r + \frac{B_r}{r} \right).$$

Bei einem $u_z \neq 0$ ergäbe sich daraus eine nicht allgemein zu erfüllende Bedingung. Zudem sollen bei der hier zu betrachtenden Störung in radialer Richtung Störungskomponenten senkrecht zur z_0-Ebene von geringerem Interesse sein, so daß ich den Fall $u_z = 0$ voraussetzen werde. Damit ergibt sich auch aus (155), daß $b_z = 0$. Zusammenfassend folgt somit

$$b_r = b_z = u_z = 0 \; . \qquad (161)$$

Es verbleiben noch fünf Gleichungen zur Berechnung der restlichen sechs Störungsamplituden. Zur Lösung des Gleichungssystems nehme ich daher noch die weitere Beziehung

$$\delta p = a^2 \cdot \delta \rho \qquad (162)$$

hinzu.
Mit (154) und (151) erhalte ich die Gleichung

$$i\cdot\omega\cdot b_\varphi = \left(- u_r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - u_\varphi \frac{\partial B_r}{\partial r} \right) + i\cdot k \left(u_r \cdot B_\varphi - u_\varphi \cdot B_r \right)$$

und aus (156) und (157) die Gleichungen

$$\delta\rho = \frac{\rho}{\omega}\left(k + \frac{i}{r}\right) u_r$$

$$\delta\phi = -\frac{4\pi \cdot G \cdot \rho}{\omega \cdot k}\, u_r \quad .$$

Es verbleiben nun die zwei Gleichungen (158) und (159) zur Berechnung von u_r und u_φ. In diesen beiden Gleichungen werden b_φ, $\delta\rho$, δp und $\delta\phi$ entsprechend den obigen Gleichungen eingesetzt. Setze ich weiterhin $\omega = -i \cdot \alpha$ und führe eine Trennung von Real- und Imaginärteil durch, so erhalte ich für den Realteil :

$$u_r \left\{ \alpha \frac{4}{3} F \cdot k \cdot r + \frac{k^2 \cdot a^2}{k \cdot r} + \Omega_b^2 \left(1 + \frac{r}{B_\varphi} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right) k \cdot r \right\} +$$

$$+ \left\{ -\Omega_c^2 \left(2 + \frac{r}{B_\varphi} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right) k \cdot r - \right. \qquad (163)$$

$$\left. - \Omega_c^2 \frac{r}{B_r} \frac{\partial B_r}{\partial r} k \cdot r \right\} u_\varphi = 0$$

$$- u_r \left\{ F \cdot \Omega_*' \right\} + u_\varphi \left\{ \alpha \cdot F + \Omega_a^2 \left(1 + \frac{r}{B_r} \frac{\partial B_r}{\partial r}\right) \right\} = 0 \qquad (164)$$

und für den Imaginärteil :

$$u_r \left\{ \alpha^2 + \alpha \frac{4}{3} F (1 + k^2 \cdot r^2) + \Omega_3^2 + \Omega_b^2 \cdot k^2 \cdot r^2 - \right.$$

$$-\Omega_b^2\left(2+\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right)\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}+\Omega_b^2\left(1+\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right)\Big\}+ \qquad (165)$$

$$+u_\varphi\left\{2\cdot\alpha\cdot\Omega+\Omega_c^2\left(2+\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right)\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial r}-\Omega_c^2\cdot k^2\cdot r^2\right\}=0$$

$$-u_r\left\{\alpha\left(2\cdot\Omega+r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)-F\cdot\Omega_*'+\Omega_b^2\left(1+\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right)+\right. \qquad (166)$$

$$\left.+\Omega_c^2\left(k^2r^2-\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right)\right\}+u_\varphi\left\{\alpha^2+\alpha\cdot F\left(1+r^2k^2\right)+\right.$$

$$\left.+\Omega_a^2\left(k^2r^2-\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial r}\right)\right\}=0\ .$$

Es wurden folgende Abkürzungen in diese Gleichungen eingeführt:

$$\Omega_a^2=\frac{B_r^2}{4\pi\cdot\rho\cdot r^2} \qquad \Omega_b^2=\frac{B_\varphi^2}{4\pi\cdot\rho\cdot r^2}$$

$$\Omega_c^2=\frac{B_r\cdot B_\varphi}{4\pi\cdot\rho\cdot r^2} \qquad F=\frac{\nu^2}{r^2}\ .$$

Die sich aus den Gleichungen (163) bis (166) ergebenden charakteristischen Gleichungen lauten bei Verwendung von (151)

$$\alpha^2\left\{\frac{4}{3}F\right\}+\alpha\left\{\frac{\sigma^2}{r^2}+\Omega_b^2\left(1+\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right)\right\}+$$

$$+\left\{-\Omega_c^2\cdot\Omega_*'\left(1+\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right)\right\}=0 \qquad (167)$$

für den Realteil; und für den Imaginärteil:

$$\alpha^4+\alpha^3\left\{\frac{7}{3}F\left(1+k^2r^2\right)\right\}+\alpha^2\left\{\Omega_3^2+\right.$$

$$+ 2\cdot\Omega\left(2\cdot\Omega + r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) + \left(\Omega_a^2 + \Omega_b^2\right)\cdot\left(1+k^2\cdot r^2\right) +$$

$$+ \frac{4}{3}\cdot F^2\left(1+k^2\cdot r^2\right)^2 - \Omega_b^2\left(1 + \frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right)\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\Big\} +$$

$$+ \alpha\Big\{F\left(1+k^2\cdot r^2\right)\cdot\Big[\Omega_b^2\left(1 + k^2\cdot r^2 - \frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} + \left(\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right)^2\right) +$$

$$+ \frac{4}{3}\Omega_a^2 + \Omega_z^2\Big] - 2\cdot\Omega_c^2\left(2\cdot\Omega + r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) -$$

$$- \Omega_c^2\cdot r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\left(k^2\cdot r^2 + \frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right) - 4\cdot\Omega\cdot\Omega_c^2\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} -$$

$$- 2\cdot\Omega\cdot F\cdot\Omega_*' + 2\cdot\Omega\cdot\Omega_b^2\left(1 + \frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right)\Big\} + \qquad (168)$$

$$+ \Big\{\Omega_z^2\cdot\Omega_a^2\left(1+k^2\cdot r^2\right) + F\cdot\Omega_*'\cdot\Omega_c^2\left(2 + k^2\cdot r^2 + \frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right) -$$

$$- \Omega_a^2\cdot\Omega_b^2\left(1 + \frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right)\cdot\left(k^2\cdot r^2 - \frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right) -$$

$$- \Omega_b^2\cdot\Omega_c^2\left(1 + \frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right)\cdot\left(2 + k^2\cdot r^2 + \frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right)\Big\} = 0 \ .$$

Die Anwendung der Stabilitätskriterien (70) und (71) bezüglich der Gleichung (167) ergibt unabhängig von der Störungswellenlänge rein dynamische Kriterien. Da

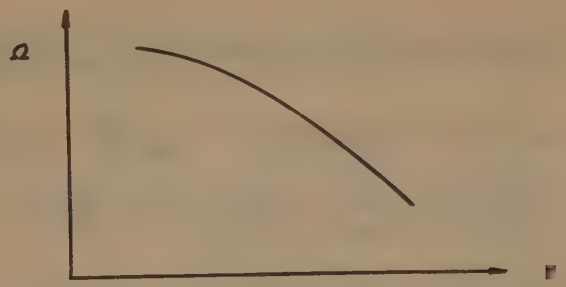
$$\Omega_*' = r^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} - 3\cdot r\frac{\partial\Omega}{\partial r} = r^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} - 3\left|r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right| \ ,$$

ergibt sich im Falle

$$1 + \frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} < 0$$

sofort, daß der folgende Verlauf der Winkelgeschwindigkeit

(Figur 13) immer instabil ist.



Dies entspricht dem Verlauf im bereits bekannten Instabilitätsgebiet; hier dem Übergangsgebiet zur differentiell rotierenden Hülle. Weiterhin muß folgende Stabilitätsbedingung erfüllt sein :

$$a^2 > v_A^2 \left(\left| \frac{r}{B_\varphi} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \right| - 1 \right) .$$

Da v_A der Alfvén - Geschwindigkeit (43) in tangentialer Richtung entspricht, bedeutet das im wesentlichen, daß die Schallgeschwindigkeit größer als die Alfvén - Geschwindigkeit sein muß. Diese Bedingung kann in Gebieten mit starkem Magnetfeldgradienten verletzt sein, d.h. also in diesem Falle in dem mit Überschallgeschwindigkeit rotierendem Instabilitätsgebiet, in dem Stoßwellen mit entsprechend starken Gradienten auftreten können.

Im Falle

$$1 + \frac{r}{B_\varphi} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} > 0 ,$$

was nur im Übergangsgebiet zum Instabilitatsbereich während der Anfangsphase des Aufwickelns des Magnetfeldes möglich ist, muß folgende Stabilitätsbedingung erfüllt sein :

$$r^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} < 3 \left| r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right| .$$

Die Untersuchung der Gleichung (168) läßt sich auf den interessanten Fall $k.r \gg 1$ beschränken. Weiterhin gilt nicht mehr die Annahme (113), d.h. es ist jetzt

$$2\cdot\Omega + r\frac{\partial\Omega}{\partial r} + 0 \ .$$

Für den inneren Kern gilt dann zunächst

$$F^2 > \Omega_a^2 \gg \Omega_b^2 \qquad + \frac{\partial\Omega}{\partial r} = 0 \qquad 0 < \frac{+}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \ll 1 \ ,$$

und es reduziert sich die Gleichung (168) auf

$$\alpha^4 + \alpha^3\left\{\frac{7}{3}F\cdot k^2\cdot r^2\right\} + \alpha^2\left\{\Omega_3^2 + 4\cdot\Omega^2 + \frac{4}{3}F^2\cdot k^4\cdot r^4\right\} +$$

$$+ \alpha\left\{F\cdot k^2\cdot r^2\left(\Omega_b^2\cdot k^2\cdot r^2 + \frac{4}{3}\Omega_a^2 + \Omega_3^2\right) - \right. \qquad (169)$$

$$\left. - 4\cdot\Omega_c^2\cdot\Omega\right\} + \left\{\Omega_3^2\cdot\Omega_a^2\cdot k^2\cdot r^2 - \Omega_a^2\cdot\Omega_b^2\cdot k^2\cdot r^2\right\} = 0 \ .$$

Der letzte Summand ergibt mit (70) die Stabilitätsbedingung

$$\Omega_3^2 > \Omega_b^2 > 0. \qquad (170)$$

Hierfür läßt sich schreiben

$$k^2\cdot r^2 > \frac{B_\varphi^2}{4\pi\cdot\rho\cdot a^2} + \frac{4\pi\cdot G\cdot\rho\cdot r^2}{a^2}$$

$$k^2\cdot r^2 > 3{,}25\cdot 10^{-4}\cdot B_\varphi^2 + 1{,}36\cdot 10^{-10}\cdot r^2 \ .$$

Im inneren Kern mit kleinem tangentialen Magnetfeld ist die Bedingung (170) offenbar erfüllt, denn im interessierenden Fall ergibt sich für das Magnetfeld

$$B_\varphi < 349\,\frac{r}{\lambda} \ .$$

Da nur kurzwellige Störungen interessant sind, ist diese Bedingung sogar bis zu hohen Feldstärken erfüllt. Ausgehend vom inneren Kern zu größeren Radien, tritt bereits bei kleineren Feldstärken Instabilität auf. Da aber

die tangentialen Feldstärken in dieser Richtung zunehmen, werden infolge der Rotation und dem damit zunehmendem tangentialen Magnetfeld immer tiefere Schichten des Kernes instabil. Die Folge wird der Übergang zur differentiellen Rotation des Kernes sein.

Mit einer dementsprechenden fortschreitenden Entwicklung ergeben sich für den Kern folgende neue Bedingungen:

$$F^2 > \Omega_b^2 > \Omega_a^2$$

und

$$-1 \ll \frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} < 0 .$$

Die Gleichung (168) reduziert sich dann auf:

$$\alpha^4 + \alpha^3\left\{\frac{7}{3}F\cdot k^2\cdot r^2\right\} + \alpha^2\left\{\Omega_3^2 + 2\cdot\Omega\left(2\cdot\Omega + r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) + \right.$$

$$\left. + F^2\frac{4}{3}k^4 r^4 + \Omega_b^2\cdot k^2\cdot r^2\right\} + \alpha\left\{F^2\cdot k^2 r^2\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\Omega_b^2\cdot k^2\cdot r^2 + \Omega_3^2\right) - 2\cdot\Omega_c^2\left(2\cdot\Omega + r\frac{\partial\Omega}{\partial r}k^2 r^2\right) - \right. \qquad (171)$$

$$\left. - 2\cdot\Omega\cdot F\cdot\Omega_*' + 2\cdot\Omega\cdot\Omega_b^2\right\} + \left\{\Omega_3^2\cdot\Omega_a^2\cdot k^2\cdot r^2 - \right.$$

$$\left. - \Omega_b^2\cdot\Omega_c^2\cdot k^2\cdot r^2 + F\cdot\Omega_*'\cdot\Omega_c^2\cdot k^2 r^2\right\} = 0 .$$

Hier ergibt sich aus den letzten Summanden die Stabilitätsbedingung

$$\Omega_3^2\cdot\Omega_a^2 + F\cdot\Omega_c^2\left(r^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} + 3r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) > \Omega_b^2\cdot\Omega_c^2 .$$

Bei vernachlässigbarer differentieller Rotation gegenüber dem magnetischen Term folgt hieraus:

$$\Omega_3^2\cdot\Omega_c^2 > \Omega_b^4 > 0 .$$

Diese Bedingung ist sogar noch schärfer als (170), da

$\Omega_c^2 < \Omega_b^2$ und somit

$$\Omega_z^2 \cdot \Omega_b^2 > \Omega_z^2 \cdot \Omega_c^2 > \Omega_b^4 .$$

Bei nicht vernachlässigbarer differentieller Rotation wird für den Übergang zur differentiellen Rotation kennzeichnend sein

$$r^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} < 0 \qquad \text{und} \qquad r \frac{\partial \Omega}{\partial r} < 0 .$$

In diesem Falle wirkt die Viskosität destabilisierend. Ist die Jeanssche Bedingung (72) gerade erfüllt, dann ergibt sich hierfür

$$F \left| r^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + 3 \cdot r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right| + \Omega_b^2 < 0 .$$

Diese Bedingung kann nicht erfüllt werden.
Mit wachsendem tangentialem Magnetfeld und dem Übergang zu

$$\left| r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right| > r^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} > 0$$

tritt noch keine Stabilisierung auf.

Es kann unter Beachtung von (161) abschließend festgestellt werden, daß sich eine Instabilität in einer wachsenden Rotation und differentiellen Rotation sowie in einem Anwachsen des tangentialen Magnetfeldes bemerkbar macht.

Dem Stabilitätsverhalten in Richtung der Rotationsachse dient nun die weitere Betrachtung.
Allgemein gilt $\vec{B} = (B_r, B_\varphi, B_z)$

$$\vec{\Omega} = (0, 0, -\Omega) .$$

Ich untersuche jetzt eine Störung in der z-Richtung.

$$e^{i(\omega \cdot t - k \cdot z)} .$$

Dann gilt für alle Störungsgrößen

$$\frac{\partial}{\partial t} = i \cdot \omega \qquad \frac{\partial}{\partial z} = -i \cdot k .$$

Für das Gleichungssystem (53) bis (61) ergeben sich dann die nachfolgenden Gleichungen.

$$\frac{b_r}{r} - i\cdot k\cdot b_z = 0 \tag{172}$$

$$i\cdot\omega\cdot b_r = \left(i\cdot k\cdot B_r - \frac{\partial B_r}{\partial z}\right) u_z - \left(i\cdot k\cdot B_z - \frac{\partial B_z}{\partial z}\right) u_r \tag{173}$$

$$\left(\Omega + r\,\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right) b_r + i\cdot\omega\cdot b_\varphi - \left(i\cdot k\cdot r\cdot\Omega - r\,\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right) b_z =$$

$$= - u_r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} + u_\varphi \left(\frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} - i\cdot k\cdot B_z\right) + \tag{174}$$

$$+ \left(i\cdot k\cdot B_\varphi - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right) u_z$$

$$i\cdot\omega\cdot b_z = - u_r \left(\frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{B_z}{r}\right) + u_z \left(\frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{B_r}{r}\right) \tag{175}$$

$$i\cdot\omega\cdot\delta\rho + \frac{\rho}{r} u_r - i\cdot k\cdot\rho\cdot u_z = 0 \tag{176}$$

$$4\pi\cdot G\cdot\delta\rho + k^2\cdot\delta\phi = 0 \tag{177}$$

$$- \frac{1}{4\pi}\left\{ - i\cdot k\cdot B_z\cdot b_r + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right) b_z \right\} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\,\frac{\delta\rho}{\rho}\left\{ \frac{\partial B_r}{\partial z} B_z - \frac{\partial B_z}{\partial r} B_z - \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} B_\varphi - \frac{B_\varphi^2}{r} \right\} = \tag{178}$$

$$= - u_r \left(i\cdot\omega\cdot\rho + \frac{4}{3}\frac{\mu}{r^2} + \mu\cdot k^2 \right) - 2\cdot\rho\cdot\Omega\cdot u_\varphi$$

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} + \frac{B_\varphi}{r}\right) b_r + \left(\frac{B_r}{r} - i\cdot k\cdot B_z\right) b_\varphi + \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} b_z\right\} +$$

$$+ \frac{\delta\rho}{\rho}\left\{\mu\left(r\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} + 3\frac{\partial\Omega}{\partial r} + r\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} B_r + \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} B_z + \frac{B_\varphi\cdot B_r}{r}\right)\right\} = \qquad (179)$$

$$= - u_r \left(r\cdot\rho\frac{\partial\Omega}{\partial r} + 2\cdot\rho\cdot\Omega\right) + u_\varphi\left(i\cdot\omega\cdot\rho + \frac{\mu}{r^2} +\right.$$

$$\left. + \mu\cdot k^2\right) - r\cdot\rho\frac{\partial\Omega}{\partial z} u_z$$

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial z} + i\cdot k\cdot B_r\right) b_r + b_\varphi\left(i\cdot k\cdot B_\varphi - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right)\right\} -$$

$$- \frac{1}{4\pi}\frac{\delta\rho}{\rho}\left\{-\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} B_\varphi - \frac{\partial B_r}{\partial z} B_r + \frac{\partial B_z}{\partial r} B_r\right\} =$$

$$- \frac{1}{3}\frac{\mu}{r} k\cdot u_r + \left(i\cdot\omega\cdot\rho + \frac{4}{3}\mu\cdot k^2\right) u_z - i\cdot k\cdot\rho\cdot\delta\phi - \qquad (180)$$

$$- i\cdot k\cdot a^2\cdot\delta\rho$$

Durch eine kurze Zwischenrechnung läßt sich dieses Gleichungssystem auf drei Gleichungen für die Störungsgrößen u_r, u_φ und b_z reduzieren. Nach der Substitution $\omega = -i\cdot\alpha$ ergeben sich nach der Trennung von Real- und Imaginärteil die beiden Gleichungssysteme :

$$u_r \left\{ \alpha^2 + \alpha \cdot \nu \left(k^2 + \frac{4}{3 \cdot r^2} \right) + \frac{1}{4\pi \cdot \rho} \left(\frac{\frac{\partial B_z}{\partial z}}{\frac{\partial B_r}{\partial r}} - 1 \right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} \frac{B_z}{r} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \frac{B_z}{r} + \frac{B_\varphi^2}{r^2} \right) \right\} + u_\varphi \left\{ 2 \cdot \alpha \cdot \Omega \right\} + \qquad (181)$$

$$+ b_z \left\{ - \frac{\alpha}{4\pi \cdot \rho} \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} + r \cdot k^2 \cdot B_z \right) \right\} = 0$$

$$u_r \left\{ - \alpha \left(r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \frac{\partial B_r}{\partial r} + 2 \cdot \Omega \frac{\partial B_r}{\partial r} + r \frac{\partial \Omega}{\partial z} \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{4\pi \cdot \rho} \left(\frac{B_r}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{B_r \cdot B_\varphi}{r^2} \frac{\partial B_z}{\partial z} - \right.$$

$$- \frac{B_z}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \frac{\partial B_r}{\partial z} - k^2 \cdot r^2 \frac{B_\varphi \cdot B_z}{r^2} \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} +$$

$$+ \frac{B_r \cdot B_z}{r^2} \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{B_z}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{B_r \cdot B_z}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial r} \Big) -$$

$$- \frac{\nu}{r^2} \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{\partial B_r}{\partial r} \right) \cdot \left(r^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + 3 r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \right. \qquad (182)$$

$$\left. \left. + r^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \right) \right\} + u_\varphi \left\{ \alpha \cdot \nu \left(\frac{1}{r^2} + k^2 \right) \frac{\partial B_r}{\partial r} - \right.$$

$$- \frac{\alpha^2}{k \cdot r} \frac{\partial B_r}{\partial z} + \frac{1}{4\pi \cdot \rho} \left(\frac{B_r^2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial r} + k^2 r^2 \frac{B_z^2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial r} \right) \Big\} +$$

$$+ b_z \left\{ \frac{\alpha}{4\pi \cdot \rho} \left(\frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right) + \right.$$

$$+ \left(r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_r}{\partial z} + r^2 \cdot k^2 \cdot r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \frac{B_z}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} + \right.$$

$$\left. \left. + r \frac{\partial \Omega}{\partial z} \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{B_z}{r} \frac{\partial B_r}{\partial z} \frac{\partial \Omega}{\partial z} r \right) \frac{1}{4\pi \cdot \rho} \right\} = 0$$

$$u_r \left\{ \alpha^2 \frac{\partial B_z}{\partial r} + \alpha \cdot \nu^2 \left(\frac{4}{3} k^2 \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{1}{3} \frac{k}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} \right) + \right.$$

$$+ \Omega_z^2 \left(\frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{1}{k^2 r^2} \frac{\partial B_r}{\partial z} \right) + \frac{1}{4\pi \cdot \rho} \left(\frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \frac{\partial B_r}{\partial z} + \right.$$

$$+ k^2 r^2 \frac{B_\varphi^2}{r^2} \frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{\partial B_r}{\partial z} + \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} \frac{\partial B_z}{\partial z} +$$

$$+ \frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} + \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_z}{\partial r} -$$

$$\left. - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \frac{\partial B_z}{\partial z} - \left(\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \Big\} +$$

$$+ u_\varphi \left\{ \frac{1}{4\pi \cdot \rho} \left(\frac{B_r \cdot B_\varphi}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{B_z}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \frac{\partial B_r}{\partial z} - \right. \right. \qquad (183)$$

$$\left. \left. - k^2 r^2 \frac{B_\varphi \cdot B_z}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right) \right\} +$$

$$+ b_z \left\{ \frac{\alpha}{4\pi \cdot \rho} \left(k^2 r^2 \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} + \left(\frac{\partial B_r}{\partial r} \right)^2 - \frac{\partial B_r}{\partial z} \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) - \right.$$

$$- \frac{1}{4\pi \cdot \rho} \left(- r \frac{\partial \Omega}{\partial z} \frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial B_r}{\partial z} + k^2 r^2 \frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \right.$$

$$\left. \left. + r \frac{\partial \Omega}{\partial z} \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} + r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \frac{\partial B_r}{\partial z} \right) \right\} = 0$$

Das Gleichungssystem (181) bis (183) entspricht dem Realteil; das folgende Gleichungssystem (184) bis (186) dem Imaginärteil.

$$u_r \left\{ \alpha^2 + \left(\frac{4}{3} \frac{1}{r^2} + k^2 \right) \alpha \cdot \nu^2 - \frac{1}{4\pi \cdot \rho} \left(1 + k^2 r^2 \frac{\frac{\partial B_z}{\partial r}}{\frac{\partial B_r}{\partial z}} \right) \right.$$

$$\cdot\left(\frac{B_z}{r}\frac{\partial B_r}{\partial z}-\frac{B_z}{r}\frac{\partial B_z}{\partial r}+\frac{B_\varphi^2}{r^2}\right)\Big\}+u_\varphi\{2\cdot\alpha\cdot\Omega\}+$$

$$+b_z\left\{\frac{\alpha}{4\pi\cdot\rho}\left(\frac{\partial B_z}{\partial r}-\frac{\partial B_r}{\partial z}-r\cdot k^2\cdot B_z\right)\right\}=0 \qquad (184)$$

$$u_r\left\{\alpha\left(-r\frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{\partial B_z}{\partial z}+r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{\partial B_r}{\partial z}+2\cdot\Omega\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{4\pi\cdot\rho}\left(-\frac{B_r}{r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\frac{\partial B_z}{\partial z}+\frac{B_z}{r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}+\right.$$

$$+\frac{B_r\cdot B_z}{r^2}\frac{\partial B_r}{\partial z}-k^2\cdot r^2\frac{B_r\cdot B_\varphi}{r^2}\frac{\partial B_z}{\partial r}-$$

$$-k^2\cdot r^2\frac{B_z}{r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\frac{\partial B_r}{\partial r}+k^2\cdot r^2\frac{B_r\cdot B_z}{r^2}\frac{\partial B_z}{\partial z}+$$

$$\left.+k^2r^2\frac{B_r}{r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\frac{\partial B_z}{\partial r}+k^2\cdot r^2\frac{B_r\cdot B_z}{r^2}\frac{\partial B_z}{\partial r}\right)- \qquad (185)$$

$$-\frac{\mu}{r^2}\left(k^2\cdot r^2\frac{\partial B_z}{\partial r}+\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)\cdot\left(r^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}+3\cdot r\frac{\partial\Omega}{\partial r}+\right.$$

$$\left.+r^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}\right)\Big\}+u_\varphi\left\{-\alpha^2\cdot k\cdot r\frac{\partial B_r}{\partial r}-\alpha\cdot\rho\left(k^2+\frac{1}{r^2}\right)\cdot\right.$$

$$\cdot\frac{\partial B_r}{\partial z}-\frac{1}{4\pi\cdot\rho}\left(\frac{B_r^2}{r^2}\frac{\partial B_r}{\partial z}+k^2\cdot r^2\frac{B_z^2}{r^2}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)\Big\}+$$

$$+b_z\left\{\frac{\alpha}{4\pi\cdot\rho}\left(\frac{B_r}{r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}+k^2r^2\frac{B_\varphi}{r}\frac{\partial B_r}{\partial r}\right)-\right.$$

$$-\frac{1}{4\pi\cdot\rho}\left(r\frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{B_r}{r}\frac{\partial B_r}{\partial z}-k^2\cdot r^2\frac{B_r}{r}\frac{\partial B_r}{\partial r}+\frac{\partial\Omega}{\partial r}+\right.$$

$$+ k^2 r^2 \frac{B_z}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} r \frac{\partial \Omega}{\partial z} + k^2 r^2 \frac{B_z}{r} \frac{\partial B_r}{\partial z} r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \Big) \Big\} = 0$$

$$u_r \Big\{ - \alpha^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} - \alpha \cdot \nu \Big(\frac{4}{3} k^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{1}{3} \frac{k}{r} \frac{\partial B_r}{\partial z} \Big) +$$

$$+ \Omega_z^2 \Big(\frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{\partial B_z}{\partial z} \Big) + \frac{1}{4\pi \cdot \rho} \Big(\frac{\partial B_r}{\partial z} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} +$$

$$+ \Big(\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \Big)^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} + r^2 k^2 \frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} +$$

$$+ k^2 r^2 \frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \frac{\partial B_z}{\partial r} - k^2 r^2 \frac{B_\varphi^2}{r^2} \frac{\partial B_z}{\partial z} -$$

$$- k^2 r^2 \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_r}{\partial z} \frac{\partial B_z}{\partial r} + k^2 r^2 \frac{B_r}{r} \Big(\frac{\partial B_z}{\partial r} \Big)^2 - \qquad (186)$$

$$- \frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial B_r}{\partial z} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} - \frac{B_r}{r} \Big(\frac{\partial B_r}{\partial z} \Big)^2 + \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_r}{\partial z} \frac{\partial B_z}{\partial r} \Big) \Big\} +$$

$$+ u_\varphi \Big\{ \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_r}{\partial z} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} - k^2 r^2 \frac{B_z}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} +$$

$$+ k^2 r^2 \frac{B_\varphi \cdot B_z}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial r} - k^2 r^2 \frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_z}{\partial r} -$$

$$- k^2 r^2 \frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_z}{\partial z} \Big) \Big\} + b_z \Big\{ \frac{\alpha}{4\pi \cdot \rho} \Big(k^2 r^2 \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_r}{\partial z} -$$

$$- k^2 r^2 \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_z}{\partial r} - k^2 r^2 \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_r}{\partial z} \Big) -$$

$$- \frac{1}{4\pi \cdot \rho} \Big(- r \frac{\partial \Omega}{\partial z} \frac{\partial B_r}{\partial z} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} + k^2 r^2 \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} r \frac{\partial \Omega}{\partial r} -$$

$$- k^2 r^2 \frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} r \frac{\partial \Omega}{\partial z} - k^2 r^2 \frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial B_r}{\partial z} r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \Big) \Big\} = 0$$

Mit Rücksicht darauf, daß die allgemeinen charakteristischen Gleichungen zu den obigen beiden Gleichungssystemen sehr unübersichtlich werden, werde ich folgende Näherung untersuchen.
Ich werde die z-Komponente des Magnetfeldes vernachlässigen und die Randgebiete weitab von der Rotationsachse und außerhalb der z-Ebene unberücksichtigt lassen. Die dementsprechenden Näherungen lauten :

$$B_z \simeq 0 \qquad B_\varphi \gg B_r \qquad \left| \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right| > \left| \frac{\partial B_r}{\partial r} \right| .$$

Für die Gleichungen (181) bis (186) ergeben sich dann im Bereich $k \cdot r \gg 1$ die beiden verkürzten Gleichungssysteme. Für den Realteil ergeben sich die Gleichungen :

$$u_r \left\{ \alpha^2 + \alpha \cdot F \cdot k^2 r^2 - \Omega_b^2 \right\} + u_\varphi \left\{ 2 \cdot \alpha \cdot \Omega \right\} + \qquad (187)$$

$$+ b_z \left\{ \frac{-\alpha}{4\pi \cdot \rho} \frac{\partial B_r}{\partial z} \right\} = 0$$

$$u_r \left\{ -\alpha \left(2 \cdot \Omega + r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + F \cdot \Omega_* \right\} +$$

$$+ u_\varphi \left\{ \alpha^2 \frac{r}{B_r} \frac{\partial B_r}{\partial z} \frac{1}{k \cdot r} + \alpha \cdot F \cdot k^2 r^2 + \Omega_a^2 \right\} + \qquad (188)$$

$$+ b_z \left\{ -\alpha \frac{1}{4\pi \cdot \rho} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} + \frac{B_r}{4\pi \cdot \rho \cdot r} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right\} = 0$$

$$u_r \left\{ \alpha \frac{1}{3} F \cdot k \cdot r - \Omega_7^2 \frac{1}{k^2 r^2} \frac{r}{B_r} \frac{\partial B_r}{\partial z} + \right.$$

$$\left. + 3 \cdot \Omega_b^2 \frac{r}{B_\varphi} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right\} + u_\varphi \left\{ - \Omega_c^2 \frac{r}{B_\varphi} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right\} + \qquad (189)$$

$$+ b_z \left\{ \alpha \frac{B_r}{4\pi \cdot \rho \cdot r} \right\} = 0$$

Für den Imaginärteil ergeben sich die Gleichungen :

$$u_r \left\{ \alpha^2 + \alpha \cdot F \cdot k^2 r^2 - \Omega_b^2 \right\} + u_\varphi \left\{ 2 \cdot \alpha \cdot \Omega \right\} +$$

$$+ b_z \left\{ - \alpha \frac{1}{4\pi \cdot \rho} \frac{\partial B_r}{\partial z} \right\} = 0 \qquad (190)$$

$$u_r \left\{ \alpha \left(2 \cdot \Omega + r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) - F \cdot \Omega_* \right\} \frac{\partial B_r}{\partial z} +$$

$$+ u_\varphi \left\{ \alpha^2 \cdot k \cdot B_r - \alpha \cdot F \cdot k^2 r^2 \frac{\partial B_r}{\partial z} - \Omega_a^2 \frac{\partial B_r}{\partial z} \right\} +$$

$$+ b_z \left\{ - \alpha \cdot \Omega_c^2 \cdot k^2 r^2 - \Omega_a^2 \left(+ \frac{\partial \Omega}{\partial z} \frac{r}{B_r} \frac{\partial B_r}{\partial z} - \right. \right. \qquad (191)$$

$$\left. \left. - + \frac{\partial \Omega}{\partial r} k^2 r^2 \right\} = 0 \right.$$

$$u_r \left\{ - \alpha \frac{1}{3} F \cdot k \cdot r \frac{\partial B_r}{\partial z} - \Omega_7^2 \frac{B_r}{r} - k^2 r^2 \cdot \Omega_c^2 \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} + \right.$$

$$+\frac{1}{4\pi\cdot\rho}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\Big\}+u_\varphi\Big\{\Omega_a^2\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\Big\}+$$

$$+b_z\Big\{-2\cdot\alpha\cdot k^2\cdot r^2\cdot\Omega_a^2\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}+k^2\cdot r^2\cdot\Omega_c^2+\frac{\partial\Omega}{\partial z}+$$

$$+k^2\cdot r^2\cdot\Omega_c^2\cdot r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\Big(\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}+\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\Big)\Big\}=0 \qquad (192)$$

Die charakteristischen Gleichungen zu (187) bis (192) lauten dann

$$\alpha^5\Big\{\frac{1}{k\cdot r}\Omega_a^2\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\Big\}+\alpha^4 F\cdot\Omega_a^2\Big\{k^2\cdot r^2+$$

$$+k\cdot r\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}+\frac{1}{3}\Big(\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\Big)^2\Big\}+\alpha^3\Big\{\Omega_a^4+$$

$$+\Omega_a^2\cdot F^2\cdot k^4\cdot r^4-\Omega_a^2\cdot\Omega_b^2\frac{1}{k\cdot r}\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}-$$

$$-\frac{2}{3}\Omega\cdot\Omega_c^2\cdot F\cdot k\cdot r\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}+2\cdot\Omega\cdot\Omega_a^2\Big(2\cdot\Omega+r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\Big)- \qquad (193)$$

$$-\Omega_7^2\cdot\Omega_a^2\frac{1}{k^3\cdot r^3}\Big(\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\Big)^3-\Omega_a^2\cdot\Omega_b^2\Big(\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\Big)^2+$$

$$+3\cdot\Omega_a^2\cdot\Omega_b^2\Big(\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\Big)^2\frac{r}{B_\varphi}\cdot\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\Big\}+$$

$$+\alpha^2\Big\{-F\cdot\Omega_a^2\cdot\Omega_b^2\cdot k^2\cdot r^2-6\cdot\Omega\cdot\Omega_b^2\cdot\Omega_c^2\Big(\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\Big)^2+$$

$$+ 2\cdot\Omega\cdot\Omega_3^2\cdot\Omega_c^2\,\frac{1}{k^2r^2}\,\frac{r}{B_\varphi}\,\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\,\frac{r}{B_r}\,\frac{\partial B_r}{\partial z} +$$

$$+ \frac{2}{3}\,\Omega\cdot\Omega_a^2\cdot F\cdot k\cdot r\cdot r\,\frac{\partial\Omega}{\partial z} + \frac{1}{3}\,F\cdot\Omega_a^4\cdot k\cdot r\,\frac{r}{B_r}\,\frac{\partial B_r}{\partial z} -$$

$$- \Omega_a^2\cdot\Omega_c^2\,\frac{r}{B_r}\,\frac{\partial B_r}{\partial z}\cdot\frac{r}{B_\varphi}\,\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\left(2\cdot\Omega + r\,\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) -$$

$$- F\cdot\Omega_a^2\cdot\Omega_3^2\left(\frac{r}{B_r}\,\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)^2 + \Omega_a^2\cdot\Omega_c^2\,\frac{r}{B_\varphi}\,\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\,r\,\frac{\partial\Omega}{\partial z} +$$

$$+ 3\cdot F\cdot\Omega_a^2\cdot\Omega_b^2\cdot k^2\cdot r^2\,\frac{r}{B_\varphi}\,\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\,\frac{r}{B_r}\,\frac{\partial B_r}{\partial z} - \qquad (193)$$

$$- \Omega_c^4\cdot F\cdot k^2\cdot r^2\left(\frac{r}{B_\varphi}\,\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right)^2 - 2\cdot\Omega\cdot F\cdot\Omega_*\cdot\Omega_a^2\Big\} +$$

$$+ \alpha\Big\{- \Omega_a^4\cdot\Omega_b^2 - 2\cdot\Omega\cdot\Omega_3^2\cdot\Omega_a^2\,\frac{1}{k^2r^2}\,\frac{r}{B_r}\,\frac{\partial B_r}{\partial z}\,r\,\frac{\partial\Omega}{\partial z} +$$

$$+ \Omega_b^2\cdot\Omega_c^4\left(\frac{r}{B_\varphi}\,\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right)^2 + 6\cdot\Omega\cdot\Omega_a^2\cdot\Omega_b^2\,\frac{r}{B_\varphi}\,\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\,r\,\frac{\partial\Omega}{\partial z} +$$

$$+ \Omega_a^2\cdot F\cdot\Omega_c^2\cdot\Omega_*\,\frac{r}{B_r}\,\frac{\partial B_r}{\partial z}\,\frac{r}{B_\varphi}\,\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} +$$

$$+ 3\cdot\Omega_a^4\cdot\Omega_b^2\,\frac{r}{B_r}\,\frac{\partial B_r}{\partial z}\,\frac{r}{B_\varphi}\,\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} - \Omega_3^2\cdot\Omega_a^4\,\frac{1}{k^2r^2}\left(\frac{r}{B_r}\,\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)^2 +$$

$$+ \Omega_a^2\cdot\Omega_c^2\cdot F\cdot k^2r^2\,\frac{r}{B_\varphi}\,\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\,r\,\frac{\partial\Omega}{\partial z}\Big\} +$$

$$+\left\{-\Omega_a^2\cdot\Omega_b^2\cdot\Omega_c^2\,\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\,r\,\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right\}=0$$

für den Realteil; und für den Imaginärteil

$$\alpha^5\left\{2\cdot k^2 r^2\cdot\Omega_a^2\,\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right\}+\alpha^4\left\{-2\cdot k^3 r^3\cdot F\cdot\Omega_a^2\left(\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)^2-\right.$$

$$-k^2 r^2\cdot\Omega_c^2\,r\,\frac{\partial\Omega}{\partial r}\left(\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}+\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}-1\right)+$$

$$\left.+2\cdot k^4 r^4\cdot F\cdot\Omega_a^2\,\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right\}+\alpha^3\left\{\Omega_z^2\cdot\Omega_a^2\,\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}+\right.$$

$$+\frac{2}{3}k^2 r^2\cdot F\cdot\Omega\cdot\Omega_c^2\,\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}+k^4 r^4\cdot\Omega_c^4\,\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\,\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}-$$

(194)

$$-\frac{1}{3}k^2 r^2\cdot F^2\cdot\Omega_a^2\left(\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)^1-k\cdot r\cdot\Omega_c^4\,\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\,\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}-$$

$$-4\cdot k\cdot r\cdot\Omega\cdot\Omega_a^2\left(\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)^2\left(2\cdot\Omega+r\,\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)+$$

$$+k^3 r^3\cdot F\cdot\Omega_c^2\,\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\,r\,\frac{\partial\Omega}{\partial r}\left(\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}+\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}-1\right)-$$

$$-2\cdot k\cdot r\cdot\Omega_a^4\left(\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)^2-2\cdot k^5 r^5\cdot F^2\cdot\Omega_a^2\left(\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)^2-$$

$$-k^4 r^4\cdot F\cdot\Omega_c^2\cdot r\,\frac{\partial\Omega}{\partial r}\left(\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}+\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}-1\right)-$$

$$- 3\cdot k^2\cdot r^2\cdot \Omega_a^2\cdot \Omega_b^2 \frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\Big\} + \alpha^2\Big\{-2\cdot\Omega\cdot\Omega_c^2\cdot\Omega_3^2\cdot k\cdot r +$$

$$+ 2\cdot\Omega\cdot\Omega_b^2\cdot\Omega_c^2 \frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} +$$

$$+ \frac{2}{3}\Omega\cdot\Omega_a^2\cdot F\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\left(r\frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} - r\frac{\partial\Omega}{\partial r}k^2r^2\right) +$$

$$+ \Omega_a^2\cdot\Omega_c^2\frac{1}{k\cdot r}\left(2\cdot\Omega + r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\cdot\left(\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)^3\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} -$$

$$- k\cdot r\cdot F\cdot\Omega_3^2\cdot\Omega_a^2\left(\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)^2 - 2\cdot k^3\cdot r^3\cdot\Omega\cdot\Omega_b^2\cdot\Omega_c^2\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} +$$

$$+ F\cdot k\cdot r\cdot\Omega_a^2\cdot\Omega_b^2\left(\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)^3\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - \qquad (194)$$

$$- k^3r^3\cdot F\cdot\Omega_b^2\cdot\Omega_c^2\left(\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)^2\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} - \frac{1}{3}F\cdot\Omega_a^4\left(\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)^3 -$$

$$- \frac{1}{k\cdot r}\Omega_a^2\cdot\Omega_c^2\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\left(r\frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} - r\frac{\partial\Omega}{\partial r}k^2r^2\right) +$$

$$+ F\cdot k^3r^3\cdot\Omega_c^4\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} + 4\cdot k\cdot r\cdot\Omega\cdot F\cdot\Omega_*\cdot\Omega_a^2\left(\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)^2 +$$

$$+ 2\cdot k\cdot r\cdot\Omega\cdot\Omega_c^2\cdot r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\left(\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} + \frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} - 1\right)\cdot$$

$$\cdot\left(2\cdot\Omega + r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) + 2\cdot k^3\cdot r^3\cdot F\cdot\Omega_a^2\cdot\Omega_b^2\left(\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)^2 +$$

$$+ k\cdot r\cdot \Omega_a^2\cdot\Omega_c^2 \frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} r \frac{\partial\Omega}{\partial r}\left(\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} + \frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} - 1\right) +$$

$$+ k^5 r^5 \cdot F^2\cdot\Omega_c^2 \frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} r \frac{\partial\Omega}{\partial r}\left(\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} + \frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} - 1\right) +$$

$$+ k^2 r^2\cdot\Omega_b^2\cdot\Omega_c^2\cdot r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\left(\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} + \frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} - 1\right) -$$

$$- 2\cdot k^3 r^3\cdot\Omega_a^4\left(\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)^2\cdot F\Big\} +$$

$$+ \alpha\Big\{2\cdot\Omega\cdot\Omega_a^2\left(r\frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} - r\frac{\partial\Omega}{\partial r}k^2 r^2\right)\cdot \qquad (194)$$

$$\cdot\left(\frac{1}{k\cdot r}\Omega_z^2 - \frac{1}{k\cdot r}\Omega_b^2\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} +\right.$$

$$\left. + k^2 r^2\cdot\Omega_b^2\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right) - \frac{1}{k\cdot r}\Omega_a^4\cdot\Omega_z^2\left(\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)^2 -$$

$$- \frac{1}{k\cdot r}F\cdot\Omega_a^2\cdot\Omega_c^2\cdot\Omega_*\left(\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)^3\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} +$$

$$+ \frac{1}{k\cdot r}\Omega_a^4\cdot\Omega_b^2\left(\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)^3\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} -$$

$$- k\cdot r\cdot\Omega_a^2\cdot\Omega_c^4\left(\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)^2\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} +$$

$$+ 2\cdot k\cdot r\cdot\Omega_a^4\cdot\Omega_b^2\left(\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)^2 -$$

$$- k\cdot r\cdot F\cdot \Omega_a^2\cdot\Omega_c^2 \frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\left(r\frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}-\right.$$

$$\left.-r\frac{\partial\Omega}{\partial r}k^2r^2\right)-2\cdot k\cdot r\cdot F\cdot\Omega\cdot\Omega_*\Omega_c^2\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}+\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}-1\right)-k^3r^3\cdot F\cdot\Omega_c^2\cdot \qquad (194)$$

$$\cdot\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\left(\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}+\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}-1\right)\cdot\left(\Omega_b^2-\Omega_a^2\right)\Big\}+$$

$$+\Big\{-\Omega_a^2\cdot\Omega_b^2\cdot\Omega_c^2\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\left(k\cdot r\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}r\frac{\partial\Omega}{\partial r}+\right.$$

$$+r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}k^2r^2-r\frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}-$$

$$\left.-r\frac{\partial\Omega}{\partial r}k\cdot r\right)\Big\}=0$$

Entsprechend der Voraussetzung wurde in den charakteristischen Gleichungen (193) und (194) die z-Komponente des Magnetfeldes vernachlässigt.

$$B_z\simeq 0$$

Darüberhinaus wurden aber auch die Ableitungen von B_z vernachlässigt.

$$\frac{\partial B_z}{\partial r}=0 \qquad \frac{\partial B_z}{\partial z}=0$$

Der Einfluß dieser hier vernachlässigten Ableitungen wird im 16. Kapitel noch diskutiert werden.
In den nächsten Kapiteln sollen nun die charakteristischen Gleichungen (193) und (194) den Stabilitätsbedingungen (70) und (71) entsprechend untersucht werden. Hierbei werden drei Fälle der differentiellen Rotation unterschieden, wobei jeweils die differentielle Rotation in r-Richtung und in z-Richtung miteinander verglichen werden.

14. Instabilität bei schwach positiv differentiell rotierendem Kern

Der letzte Summand der beiden Gleichungen (193) und (194) ergibt bezüglich der Stabilitätsbedingung (70) die Ungleichungen

$$-\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\cdot r\frac{\partial \Omega}{\partial z} \gtrless 0 \qquad (195)$$

und

$$\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\left\{ r\frac{\partial \Omega}{\partial z}\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} - \right.$$
$$\left. - r\frac{\partial \Omega}{\partial r}\left(k\cdot r\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}+\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}-1\right)k\cdot r\right\} \gtrless 0, \qquad (196)$$

wobei das Vorzeichen der Ungleichungen bestimmt wird durch das Vorzeichen des Faktors zu α^5 beider Gleichungen, dh. von

$$\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} \gtrless 0. \qquad (197)$$

Diese Abhängigkeit ergibt sich, will man Instabilität durch diese Bedingungen von vornherein ausschließen.
Die Wahl des Vorzeichens für $\frac{\partial \Omega}{\partial z}$ wird bestimmt durch die Temperaturverteilung /51/ im Objekt, solange der Magnetfeldeinfluß den thermischen Einfluß noch nicht überragt. Ist die Temperatur in der z_0-Ebene (Äquator) größer als in der Achsrichtung (Pol), so ist der positive Gradient zu wählen. Bei umgekehrtem Verhältnis der negative Gradient.
Da im ersten Stadium der Kontraktion der positive Gradient nicht auszuschließen ist, soll dieser Fall zunächst untersucht werden. Wähle ich jetzt

$$\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} > 0,$$

so ergibt sich aus (195) für (197) die Stabilitätsbedingung

$$\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} < 0.$$

Weiterhin ergibt der Faktor zu α^4 der Gleichung (193) als Stabilitätsbedingung

$$k^2 r^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)^2 < k\cdot r\left|\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right| .$$

Diese Bedingung kann aber grundsätzlich nie erfüllt sein für reelle Werte. Daher wähle ich

$$\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} < 0 . \qquad (198)$$

Aus (195) und (197) folgt dann

$$\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} > 0 \qquad (199)$$

und für (196) die Stabilitätsbedingung

$$r\frac{\partial \Omega}{\partial z}\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\left|\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right| + k\cdot r\left|r\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right|\cdot\left(k\cdot r\left|\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right| - \frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} + 1\right) < 0 .$$

Diese Bedingung kann nur erfüllt werden für

$$\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} > 1 \qquad (200)$$

und

$$0 < k\cdot r < \frac{\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} - 1}{\left|\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right|} . \qquad (201)$$

Die Größe von (200) ist auch bestimmend für die Richtung der elektromagnetischen Kraft, da sich diese berechnet aus:

$$F_z = \frac{B_\varphi^2}{4\pi\cdot r}\left(\left|\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right| - \tan^2\Psi\cdot\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right) .$$

Nach Voraussetzung ist $\tan\Psi \ll 1$, da $B_\varphi \gg B_r$ angenommen wurde. Mit fortschreitendem Aufwickeln des Magnetfeldes ($\Psi \to 0$) wird eine evtl. zunächst komprimierende elektromagnetische Kraft in eine expandierende umschlagen.
Aus dem Faktor zu α^4 der Gleichung (194) ergibt sich

$$k^2 r^2 - k\cdot r\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} + \frac{\left|r\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right|}{2\cdot F\cdot\tan\Psi}\,\frac{\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} - \left|\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right| - 1}{\left|\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right|} > 0 . \qquad (202)$$

Erfüllt ist (202) für jedes $k \cdot r$, wenn

$$0 < \frac{2 \cdot F \cdot \tan\Psi}{\left| r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right|} \left(\frac{r}{B_r} \frac{\partial B_r}{\partial z} \right)^3 < \frac{r}{B_r} \frac{\partial B_r}{\partial z} - \left| \frac{r}{B_\varphi} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right| - 1$$

und damit auch

$$\frac{r}{B_r} \frac{\partial B_r}{\partial z} > 1 + \left| \frac{r}{B_\varphi} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right| . \qquad (203)$$

Dies entspricht auch dem physikalisch interessanten Fall ($k \cdot r > 1$), der sich aus (201) und (203) ergibt.
Betrachte ich das Kräfteverhältnis in der z_0-Ebene bei Vernachlässigung des thermischen Druckes

$$+ \cdot \Omega^2 - \frac{G \cdot M_r}{r^2} - \frac{B_\varphi^2}{4\pi \cdot r} \left(1 - \left| \frac{r}{B_\varphi} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \right| \right) = 0 \qquad (204)$$

so zeigt es sich, daß die Richtung der elektromagnetischen Kraft abhängig ist von der Größe des Magnetfeldgradienten

$$\left| \frac{r}{B_\varphi} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \right| = \begin{cases} < 1 & \text{kontrahierende Wirkung} \\ > 1 & \text{expandierende Wirkung} . \end{cases}$$

Der Fall

$$\frac{r}{B_\varphi} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} = - 1$$

entspricht einem toroidalen Magnetfeld unter Vernachlässigung der Volumenströme ($\vec{j} = 0$). Bei einem praktisch aufgewickeltem Magnetfeld ($\tan\Psi \gtrsim 0$) kann ein solches Magnetfeld verwendet werden. Entsprechend dieser Näherung verschwindet dann auch die radiale Komponente der elektromagnetischen Kraft. Aus (204) ergibt sich dann

$$\frac{r^2 \cdot \Omega^2}{G} = \int \rho \, dV = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr$$

und mit (127)

$$\rho = \frac{p}{r} \qquad (205)$$

mit einer Konstanten P.

Entsprechend diesen Überlegungen wurden die Gleichungen (193) und (194) auf ihre Stabilität an der elektronischen Rechenmaschine Zuse Z 23 untersucht. Die hierbei verwendeten Gleichungen seien noch einmal zusammengestellt.
Aus (127) und (205) ergibt sich

$$\left(2\cdot\Omega + r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) - \frac{3}{2}\Omega \qquad r\frac{\partial\Omega}{\partial r} = -\frac{1}{2}\Omega$$

und

$$\Omega_* = r^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} + 3\cdot r\frac{\partial\Omega}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2} = -\frac{3}{4}\Omega .$$

Hierbei ist

$$\Omega = \left(\frac{2\pi\cdot G\cdot\rho}{r}\right)^{1/2} = 6{,}5\cdot 10^{-4}\cdot\rho^{1/2} .$$

In Näherung sei gesetzt

$$F = \frac{10^{12}}{r^2} .$$

Weiterhin ist

$$\Omega_3^2 = k^2\cdot r^2\frac{a^2}{r^2} - 4\pi\cdot G\cdot\rho .$$

Für die Berechnung der Schallgeschwindigkeit verwende ich (137)

$$a^2 = 1{,}77\cdot 10^{20}\cdot\rho^{2/5} .$$

Die Berechnung wurde nur durchgeführt für den schwach differentiell rotierenden Kern in z-Richtung.

$$\left| r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right| \gg r\frac{\partial\Omega}{\partial z} = 10^{-15}$$

Zu der Rechnung wurden folgende Parameter vorgegeben:

P : Zur Berechnung der Dichte und der Winkelgeschwindigkeit

B_φ : Bei Berücksichtigung von

$$B_\varphi \gg B_r = 10^{-4} .$$

Desweiteren ist zu beachten, daß entsprechend dem eingefrorenem Magnetfeld $B_\varphi \sim \rho$ vorausgesetzt werden muß. Für die Rechnung wurde verwendet

$$B_\varphi = 10^{10} \cdot \rho \, .$$

Ferner noch

$$\frac{r}{B_\varphi} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = -0{,}1 \qquad \text{und} \qquad \frac{r}{B_r} \frac{\partial B_r}{\partial z} > 0 \, .$$

Die Konstante P wurde gewählt zu $P = 10^4$, entsprechend einer Dichte von $\rho = 10^{-14}$ g/cm^3 bei $r = 10^{18}$ cm.
Die Koeffizienten der charakteristischen Gleichungen (193) und (194) seien gekennzeichnet entsprechend (69) durch

$$a_{1i} \qquad i = 0, \ldots,5 \qquad (193)$$

$$a_{2i} \qquad i = 0, \ldots,5. \qquad (194)$$

Zur Vereinfachung der Stabilitätsuntersuchung genügt es, das Stabilitätskriterium (70) zu verwenden, da, wie die Rechnung ergab, kein stabiler Bereich gefunden werden konnte.
Für den Koeffizienten a_{12} ergab sich ein im interessierenden Bereich ($r = 10^8 \ldots 10^{17}$) durchweg instabiles Verhalten ($a_{12} < 0$). Wie in der Figur 14 zu ersehen ist, wächst aber zum äußeren Rand hin die Tendenz zur Stabilität. Mit fallendem Verhältnisgradienten von B_r bezüglich z, $\frac{r}{B_r} \frac{\partial B_r}{\partial z}$, wächst ebenfalls die Tendenz zur Stabilität, die aber nicht erreicht werden kann bei Beachtung von (203). Die Abhängigkeit von der Störungswellenlänge (Figur 15) ist gering.
Der Koeffizient a_{13} verletzt ebenfalls im gesamten Bereich (Figur 16), praktisch unabhängig von der Störung k·r, die Stabilitätsbedingung.
Der Koeffizient a_{14} läßt andererseits durchaus eine Strukturierung insofern erkennen (Figur 17), als unabhängig von der Störung und dem Verhältnisgradienten von B_r bezüglich z der innere Kern ein stabileres Verhalten erkennen läßt.
Ein entsprechendes Verhalten zeigt der Koeffizient a_{23} (Figur 18). Er läßt aber auch erkennen, daß das stabilere Verhalten des Kernes erst bei größerem Verhältnisgradienten auftritt. Es muß sein

$$\frac{r}{B_r} \frac{\partial B_r}{\partial z} > 50 \, .$$

Die Koeffizienten a_{21} (Figur 19), a_{24} (Figur 20) und a_{25} (Figur 21) wiederum genügen der notwendigen Stabilitätsbedingung. Erst im Bereich großer k·r, also kleiner Störungswellenlängen, genügt a_{25} nicht mehr der Stabilitätsbedingung, da dort dieser Koeffizient negativ wird. Diese Abhängigkeit bezüglich k·r ist in der Figur 22 dargestellt.
Von besonderem Interesse ist der Koeffizient a_{22} (Figur 23 und Figur 24). Bei diesem Koeffizienten ergab die Rechnung ein stark vom Verhältnisgradienten abhängiges Verhalten, was zeigt, daß die beim Koeffizienten a_{23} getroffene Feststellung eines stabileren Verhaltens bei größeren Verhältnisgradienten hier ebenfalls begrenzt wird. Diese Begrenzung und die Abhängigkeit vom Verhältnisgradienten zeigt sich deutlich für den inneren Kern in der Figur 25. Dort ist auch zu erkennen, daß mit wachsendem Verhältnisgradienten der Instabilitätsbereich bezüglich der Störung k·r anwächst. Die obere Grenze für den Verhältnisgradienten liegt der Figur 25 entsprechend bei $\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} < 25$. Dies widerspricht aber der bereits oben gemachten Feststellung, so daß für den Verhältnisgradienten stabile Bereiche ausgeschlossen werden können.
Es läßt sich somit feststellen, daß bei grundsätzlicher Instabilität des gesamten Bereiches ($r = 10^8 \ldots 10^{17}$) dennoch eine Strukturierung bezüglich eines stabileren Verhaltens einzelner Bereiche zu erkennen ist.
Das Gesamtverhalten des Systems läßt sich verstehen bei Beachtung der auftretenden magnetischen Kräfte F_φ (Figur 26) und F_z (Figur 27), die berechnet wurden nach

$$F_\varphi = \frac{B_r \cdot B_\varphi}{4\pi \cdot r}\left(1 + \frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}\right) \qquad (206)$$

$$F_z = -\frac{B_\varphi^2}{4\pi \cdot r}\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} - \frac{B_r^2}{4\pi \cdot r}\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} \; . \qquad (207)$$

Je nach der Größe des Verhältnisgradienten von B_φ bezüglich r, hier -0,1 und -10,0, erweist sich die tangentiale magnetische Kraft F_φ als verzögernd ($F_\varphi > 0$)

oder als beschleunigend ($F_\varphi < 0$) für die Rotation und erreicht in beiden Fällen ihren größten Wert im inneren Kerngebiet.

Für die Kraft F_z gilt, daß einer Vergrößerung des Verhältnisgradienten $B\varphi$ bezüglich z eine Vergrößerung des durch magnetische Kraft expandierenden Gebietes entspricht. Während im Randgebiet $r \geqslant 10^{15}$ cm die magnetische Kraft kontrahierend wirkt, unterliegt das innere Gebiet einer Expansion.

Da der Verhältnisgradient von $B\varphi$ bezüglich r die Größenordnung von etwa Minus Eins bei toroidalem Magnetfeld hat, ist $F_\varphi \ll F_z$. Damit hat die tangentiale magnetische Kraft $F\varphi$ nur einen geringen Einfluß auf die Stabilitäts- und Instabilitätsgebiete. Dagegen muß F_z als maßgeblich neben den kinematischen Größen angesehen werden.

Es erweist sich dann ein negatives F_z bei größeren Radien in Übereinstimmung mit dem Instabilitätsverhalten von a_{22} (Figur 23). Schwieriger wird es, das Instabilitätsverhalten von a_{14} (Figur 17) und a_{23} (Figur 18) in diesem Zusammenhang zu verstehen. Will man auch hier F_z als eine bestimmende Komponente deuten, worauf das in der Figur 28 erkennbare analoge Verhalten zu F_z (Figur 27) bei einer Veränderung des Verhältnisgradienten von $B\varphi$ bezüglich z schließen läßt, so muß entsprechend dem gegenläufigen Verhalten von a_{14} (Figur 17) und a_{23} (Figur 18) bei einer Veränderung des Verhältnisgradienten B_r bezüglich z auf einen großen Wert von $\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}$ geschlossen werden; was dann wiederum einer größeren Kontraktionskraft im äußeren Kernbereich entspricht. Konsequenterweise wird dann entsprechend a_{22} (Figur 24) auch der innere Kernbereich instabil für jede Störung $k \cdot r$ (Figur 25). Es muß nun andererseits angenommen werden, daß $\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}$ mit kleiner werdenden Radius ebenfalls kleiner wird, so daß für a_{22} (Figur 25) durchaus im inneren Kern gewisse Instabilitätsbereiche bezüglich $k \cdot r$ abgegrenzt werden können.

Um abschätzen zu können, ob die für $\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = -0{,}1$ berechneten Figuren 14 bis 25 auch für größere Verhältnisgradienten verwendet werden können, zeigen die Figuren 28 und 29 den Einfluß des Verhältnisgradienten auf die Koeffizienten a_{14} und a_{25}. Hiernach erweist es sich, daß bezüglich a_{14} der Stabilitätsbereich zu größeren Radien ausgeweitet wird bei einer Vergrößerung des Verhältnisgradienten und entsprechend bezüglich a_{25} der Instabilitätsbereich zu kleineren Störungen $k \cdot r$ erweitert wird. Alle anderen Koeffizienten erweisen sich als relativ unempfindlich gegenüber Veränderungen des Verhältnisgradienten.

Entsprechend den in diesem Kapitel gemachten Voraussetzungen läßt sich abschließend feststellen, daß bei unterschiedlichem Verhalten der räumlichen Bereiche kein Bereich gefunden werden konnte, der sich stabil verhalten könnte.

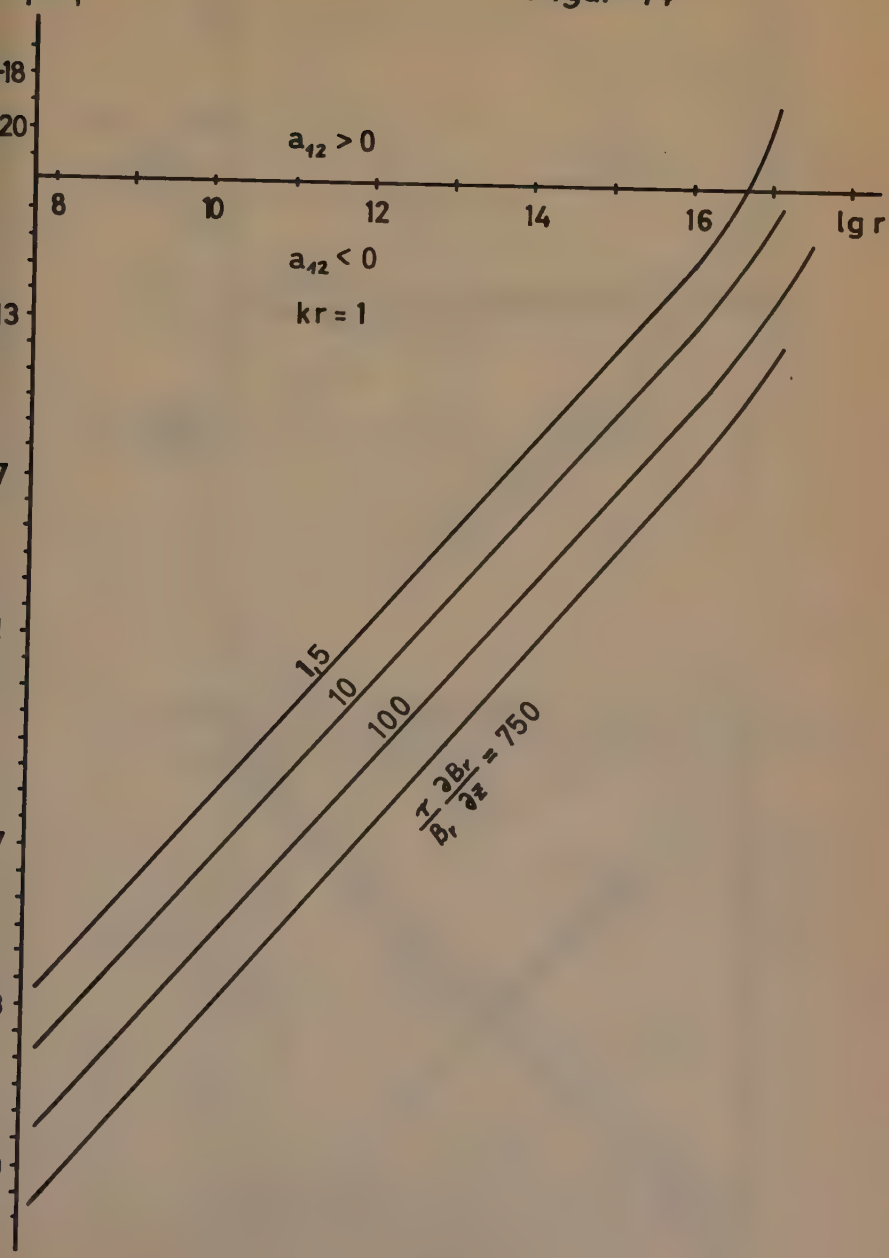
Das Kerngebiet wird immer zur Expansion in z-Richtung neigen, da F_z diese Expansion begünstigt, während in radialer Richtung die magnetische Kraft Null ist. Andererseits kann F_φ sowohl beschleunigend als auch verzögernd bezüglich der Rotation wirken.

Entsprechend dem zu Beginn dieses Kapitels ausgeschlossenen Fall der Instabilität bei

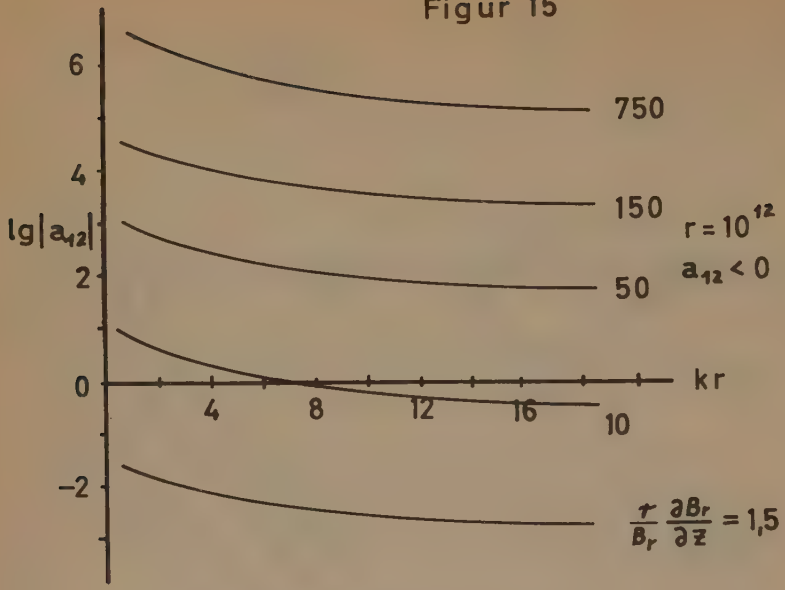
$$\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} > 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} < 0$$

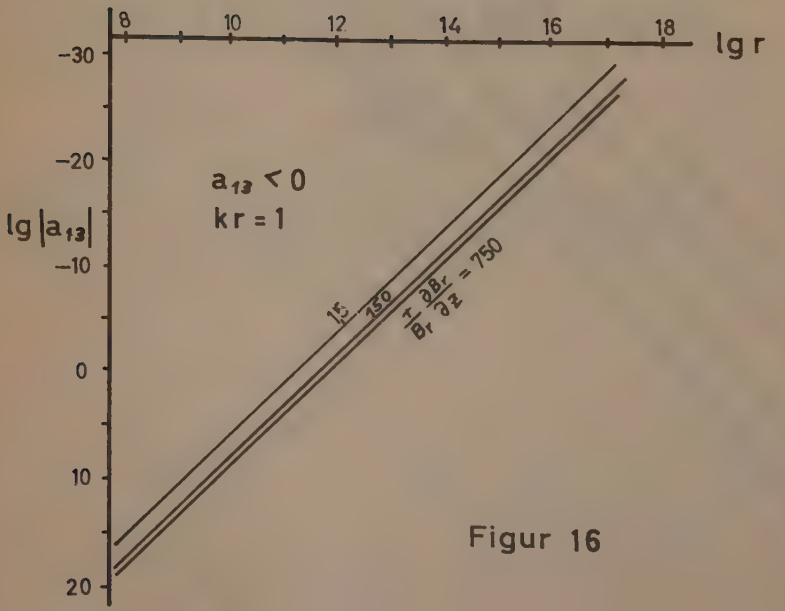
ergäbe sich dagegen eine Kontraktion des Kerngebietes durch F_z. Dieser Fall kann durchaus in Teilbereichen auftreten und soll daher noch erwähnt sein.

Figur 14

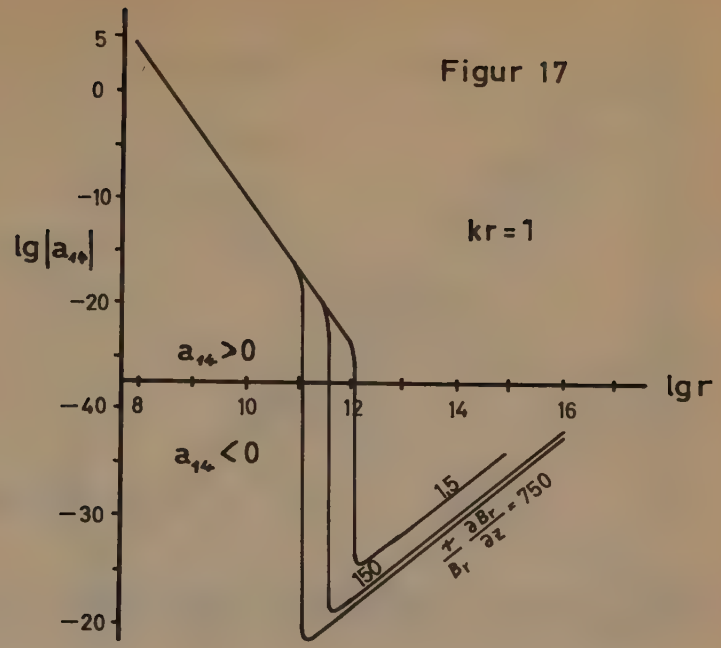

g|a12|
18
20
a12 > 0
8
10
12
14
16
lg r
a12 < 0
kr = 1
13
7
15
10
100
τ/B1 ∂Bz/∂z = 750

Figur 15

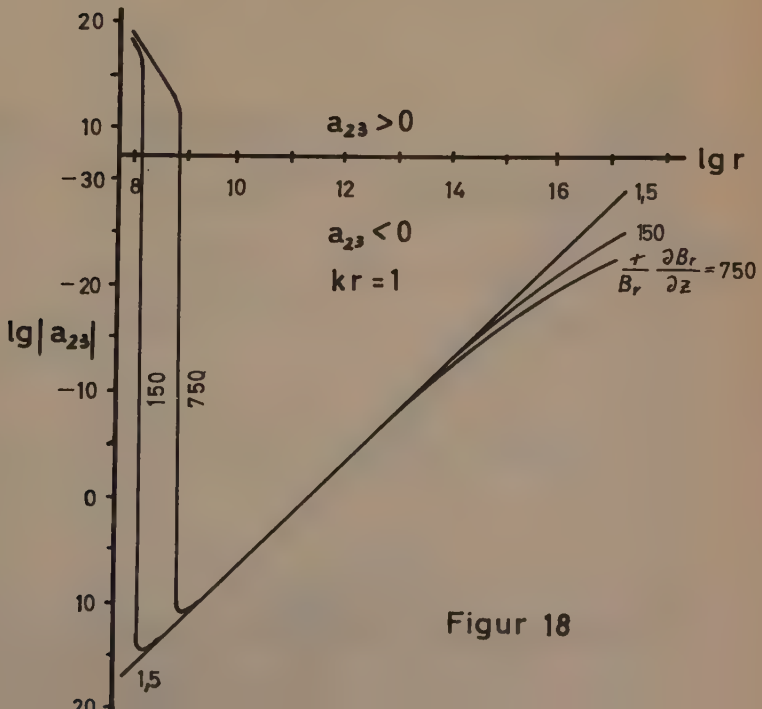




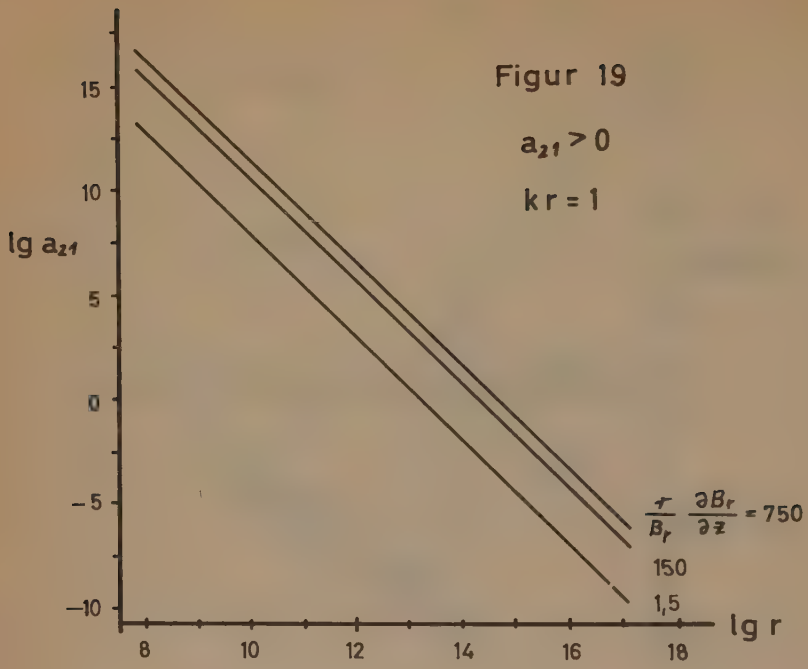
Figur 16



Figur 17



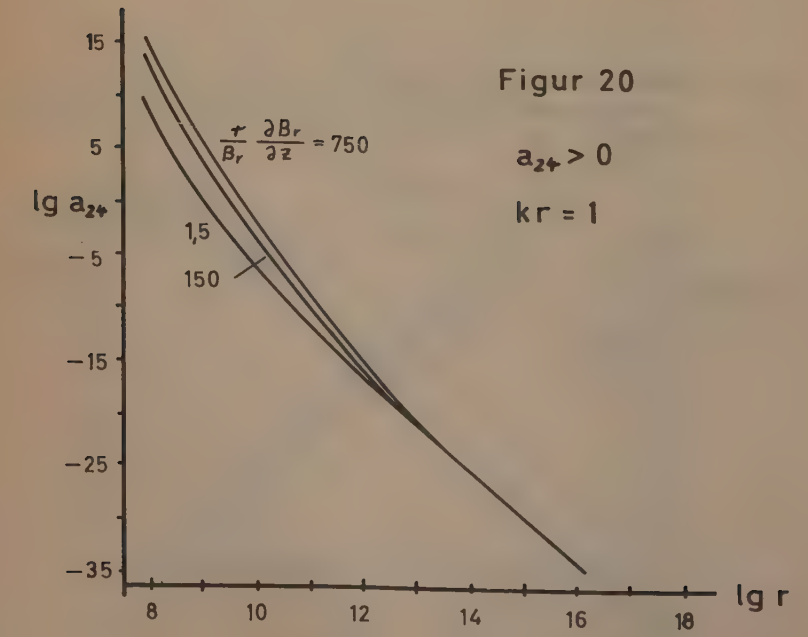
Figur 18



Figur 19

$a_{21} > 0$

kr = 1

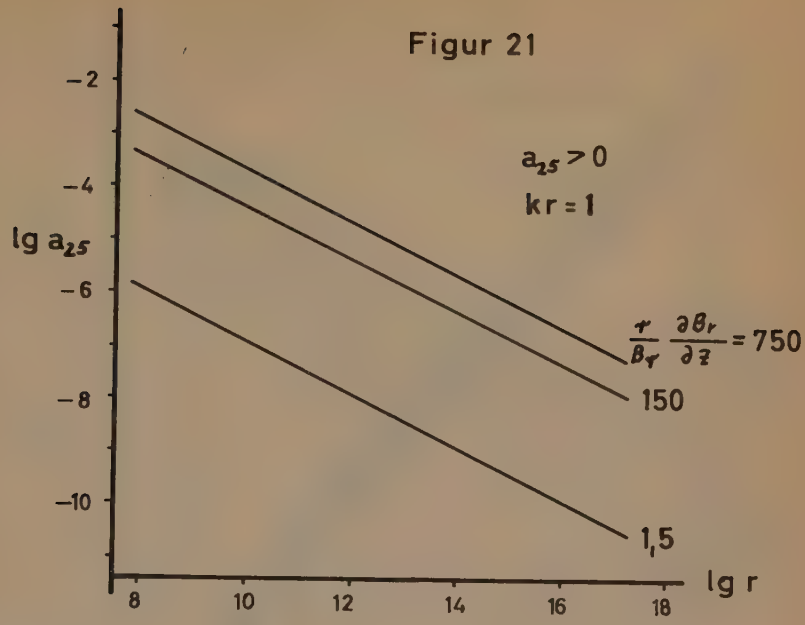


Figur 20

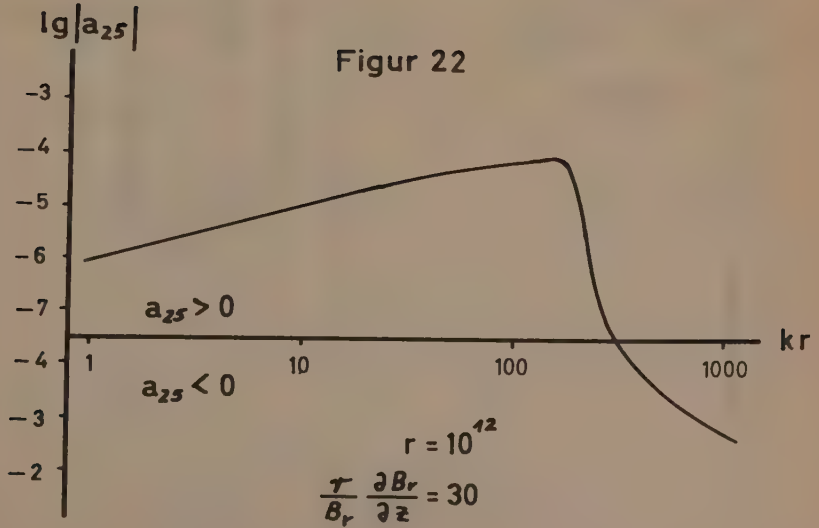
$a_{24} > 0$

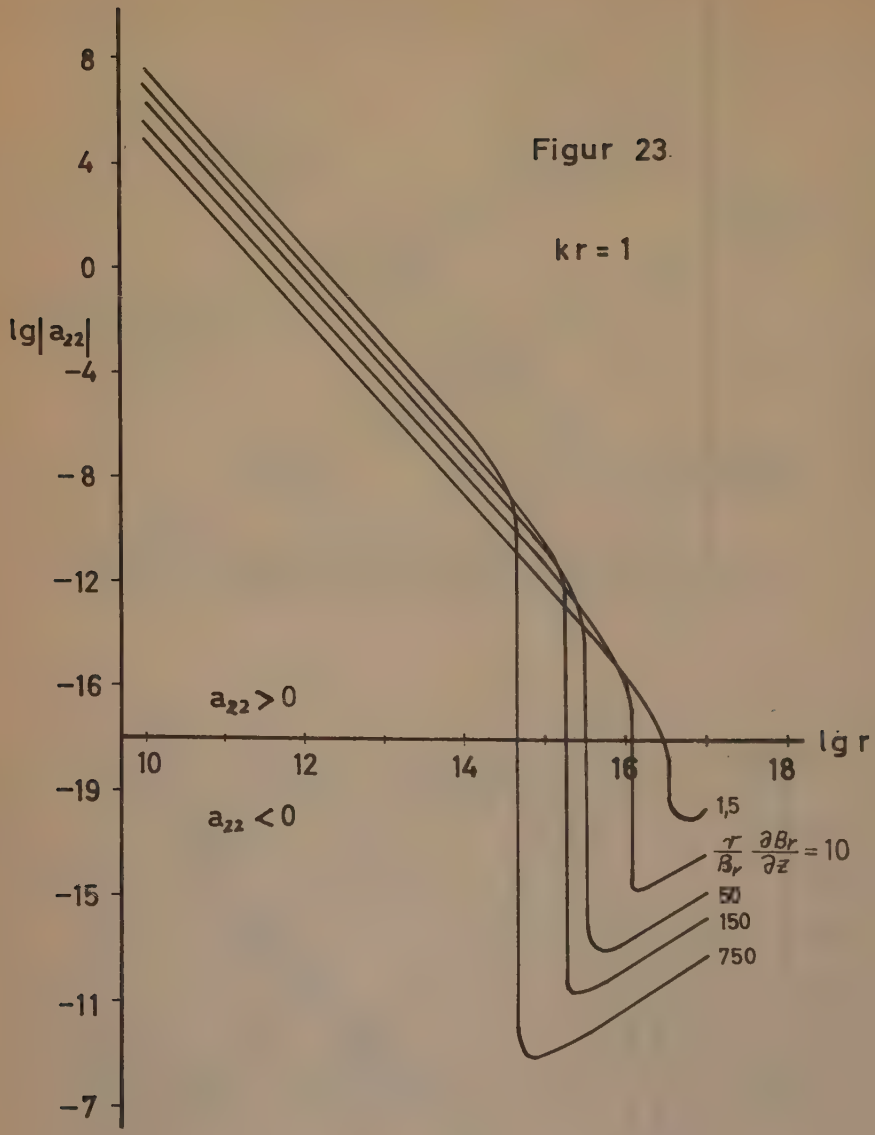
kr = 1

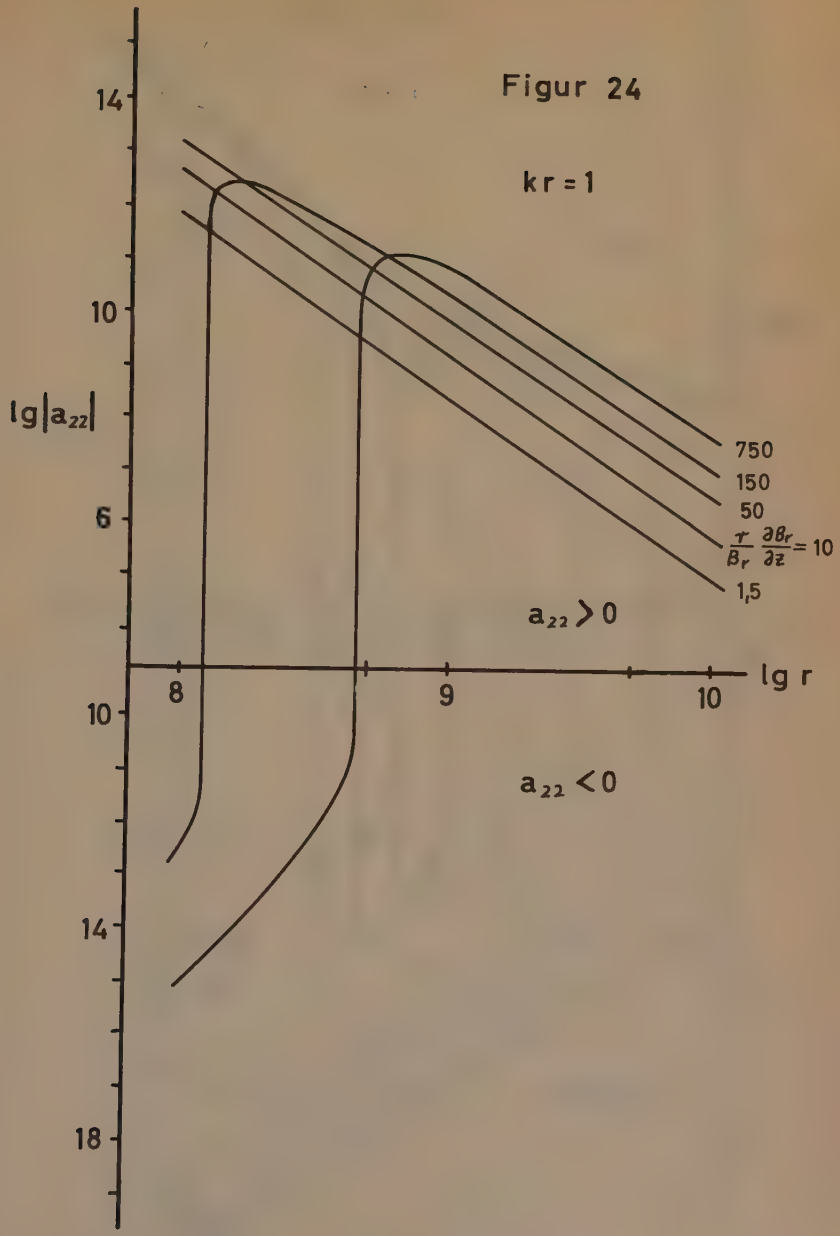
Figur 21



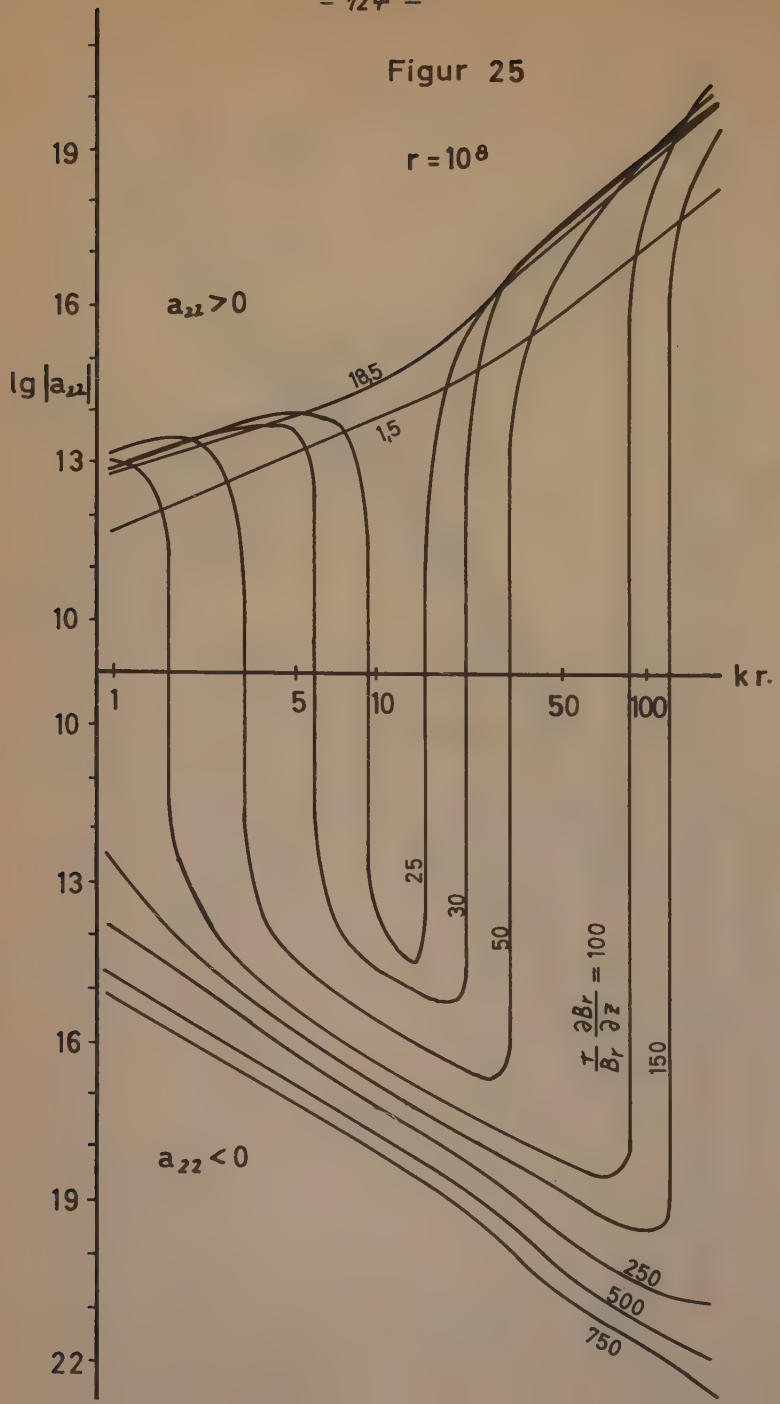
Figur 22



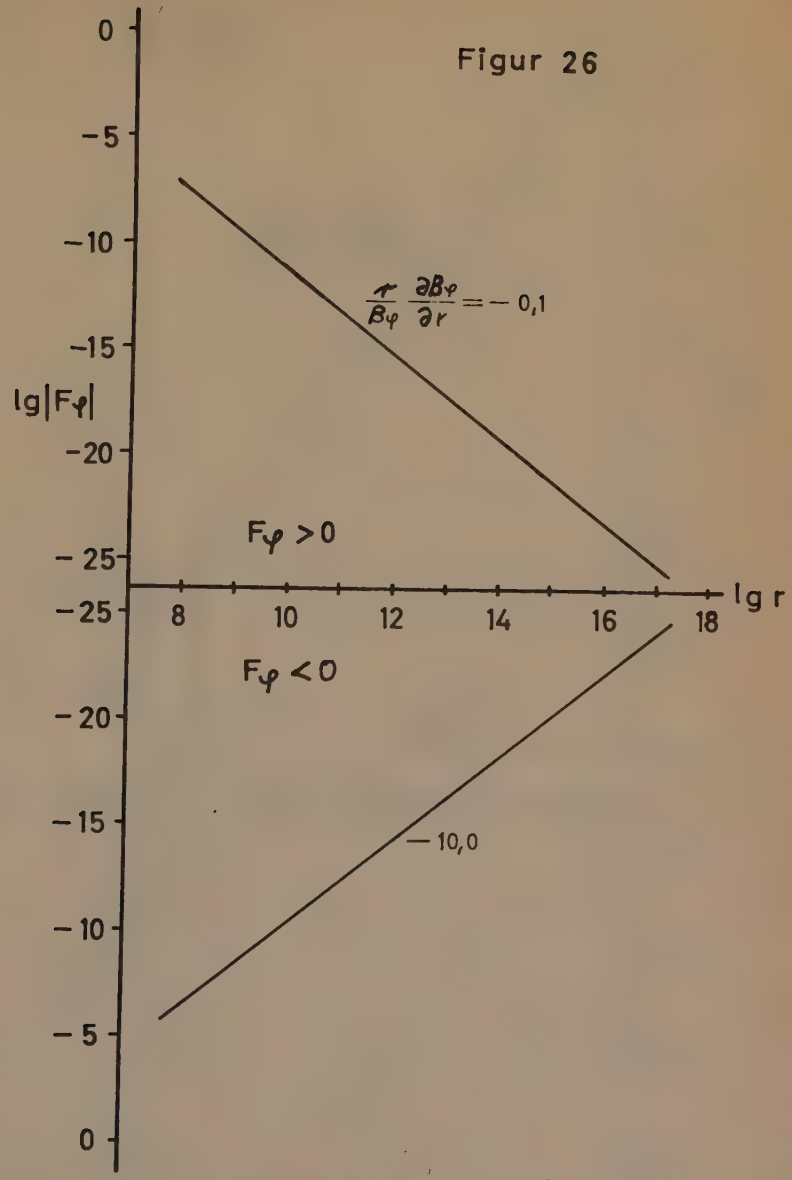

Figur 23
kr = 1
lg|a22|
8
4
0
−4
−8
−12
−16
−19
−15
−11
−7
a22 > 0
a22 < 0
10
12
14
16
18
lg r
1,5
r/Br ∂Br/∂z = 10
50
150
750


Figur 24
kr = 1
14
10
6
10
14
18
lg|a22|
750
150
50
$\frac{r}{\beta_r}\frac{\partial \beta_r}{\partial z} = 10$
1,5
a22 > 0
a22 < 0
8
9
10
lg r

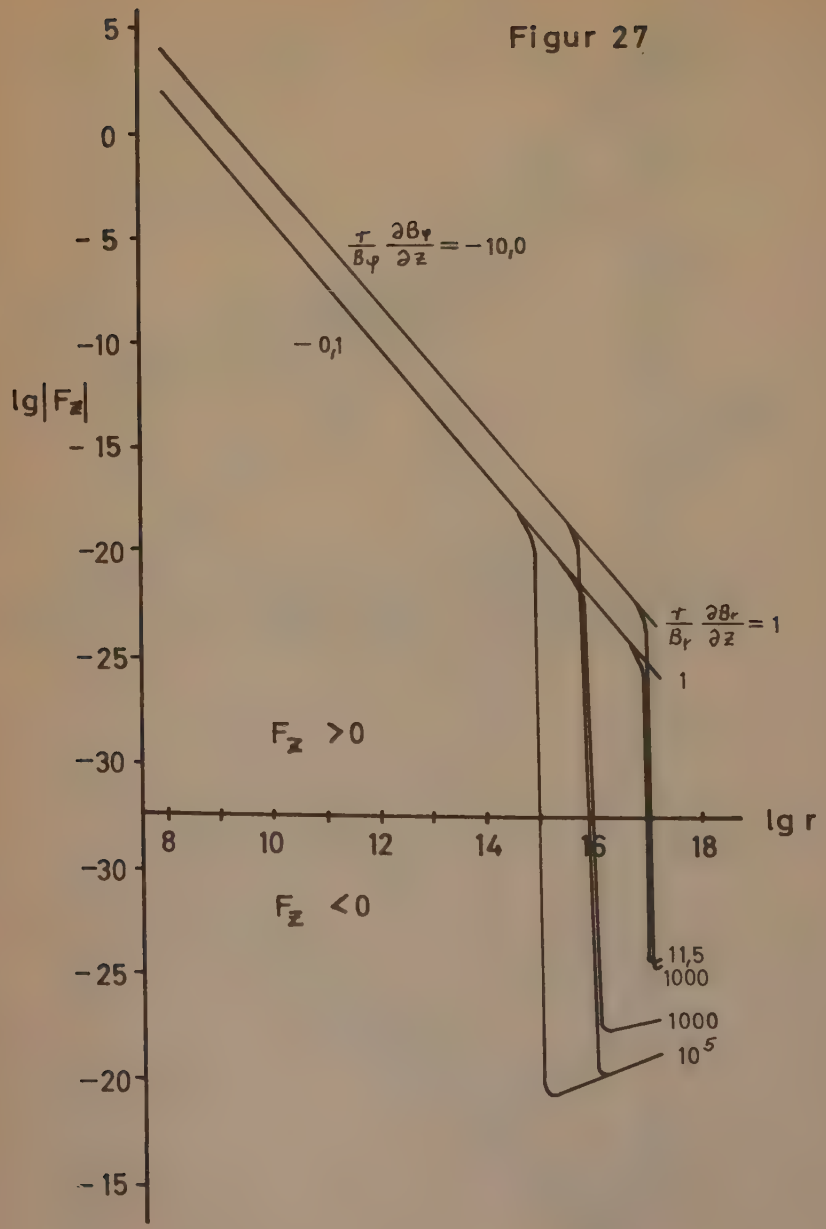
Figur 25

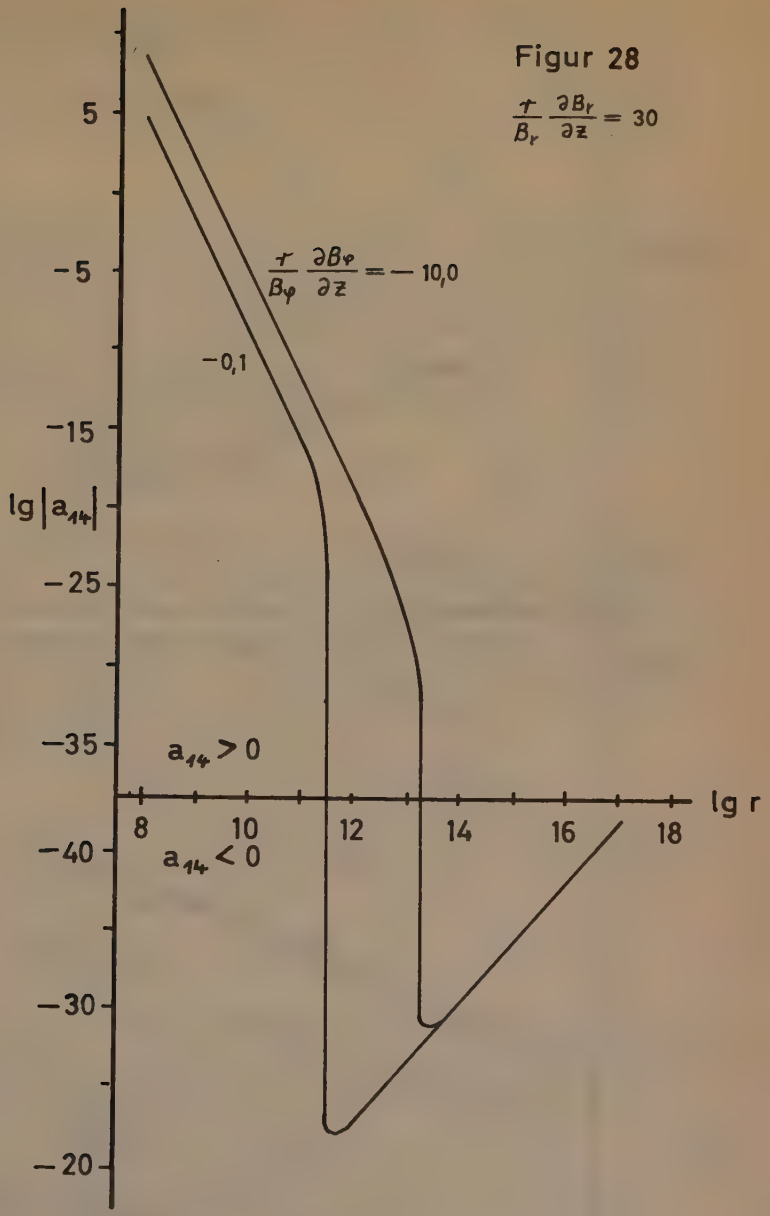

r = 10⁸
a₂₂ > 0
a₂₂ < 0
lg |a₂₂|
19
16
13
10
10
13
16
19
22
1
5
10
50
100
k r.
18,5
1,5
25
30
50
150
250
500
750
$\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} = 100$

Figur 26

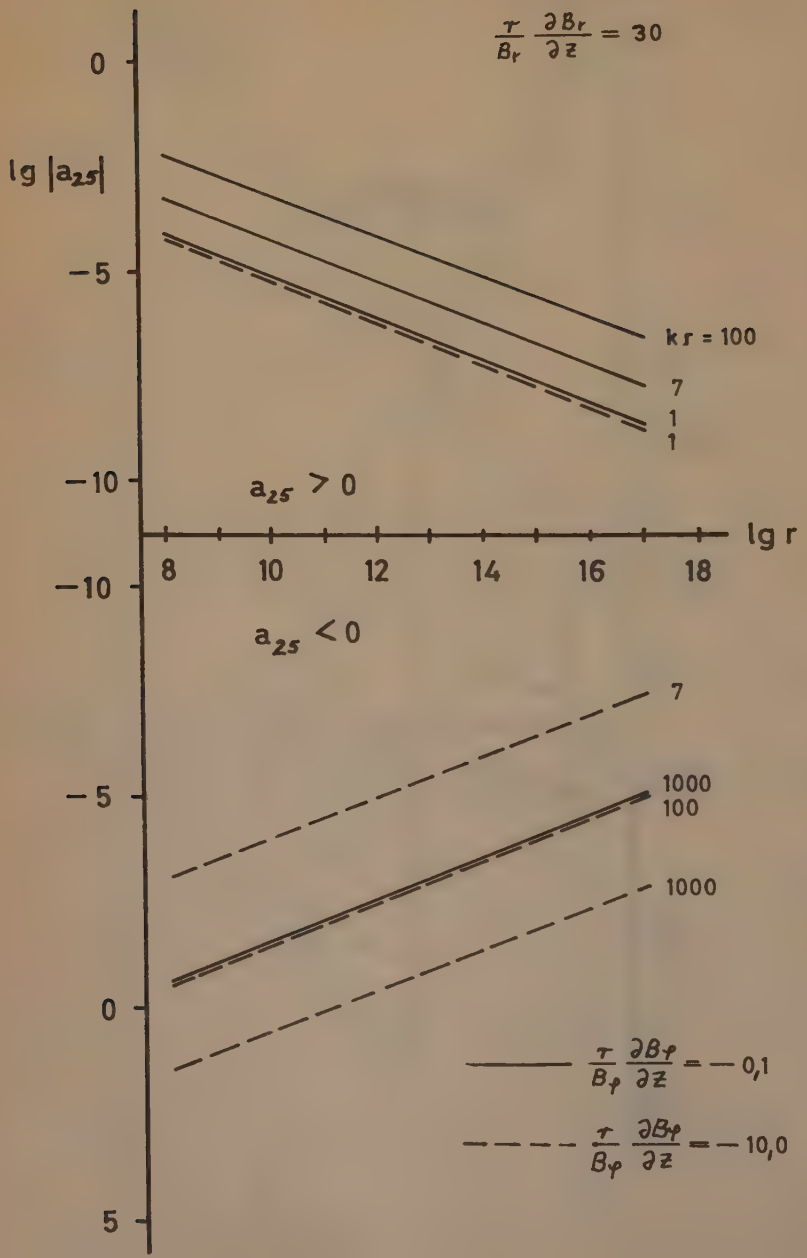

0
−5
−10
−15
lg|Fφ|
−20
−25
−25
−20
−15
−10
−5
0
8
10
12
14
16
18
lg r
$\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} = -0{,}1$
$F_\varphi > 0$
$F_\varphi < 0$
— 10,0

Figur 27


5
0
– 5
–10
– 15
–20
–25
–30
lg|F_z|
$\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = -10{,}0$
– 0,1
$\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} = 1$
1
F_z > 0
F_z < 0
8
10
12
14
16
18
lg r
11,5
1000
1000
10^5


Figur 28
$\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} = 30$
$\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = -10{,}0$
−0,1
5
−5
−15
−25
−35
−40
−30
−20
lg |a14|
a14 > 0
a14 < 0
8
10
12
14
16
18
lg r

Figur 29


$\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} = 30$
0
lg $|a_{25}|$
−5
−10
$a_{25} > 0$
kr = 100
7
1
1
lg r
8
10
12
14
16
18
−10
$a_{25} < 0$
7
−5
1000
100
1000
0
$\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = -0{,}1$
$\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = -10{,}0$
5

15. Instabilität bei schwach negativ differentiell rotierendem Kern

Entsprechend dem vorigen Kapitel soll auch in diesem gelten

$$\left| r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right| \gg \left| r \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right| .$$

Gegenüber dem im vorigen Kapitel verwendeten positiven Gradienten ist bei dem hier verwendeten negativen Gradienten auch die umgekehrte Relation sinnvoll. Zudem kann nicht ausgeschlossen werden, daß bei einer Abflachung des Systems in z-Richtung die B_z-Komponente außerhalb der z_o-Ebene ungleich Null wird. In diesem Falle wäre dann

$$F_r = \frac{B_r \cdot B_z}{4\pi \cdot r} \frac{r}{B_r} \frac{\partial B_r}{\partial z} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial B_r}{\partial z} > 0 .$$

Diese der Kontraktion entgegenwirkende Kraft entspricht einer verstärkten Abnahme der Winkelgeschwindigkeit in z-Richtung, womit beides in ursächlichem Zusammenhang zu sehen ist. Das soll aber im nächsten Kapitel genauer untersucht werden. In diesem Kapitel soll dieser Effekt noch unberücksichtigt bleiben.
Betrachte ich nun den Fall

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} < 0 ,$$

so ergibt sich für $\frac{r}{B_\varphi} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} < 0$ über (195) für (197) die Stabilitätsbedingung

$$\frac{r}{B_r} \frac{\partial B_r}{\partial z} < 0 .$$

Dieses Ergebnis führt für (196) aber auf eine nicht erfüllbare Bedingung. Um dieses Instabilitätsverhalten zunächst auszuschließen, betrachte ich den Fall

$$\frac{r}{B_\varphi} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} > 0 . \qquad (208)$$

Damit ist dann

$$\frac{r}{B_r} \frac{\partial B_r}{\partial z} > 0 , \qquad (209)$$

und für (196) erhalte ich

$$k\cdot r\left|r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right|\cdot\left(k\cdot r\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}+\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}-1\right)>$$

$$>\left|r\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right|\cdot\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\cdot\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\quad . \tag{210}$$

Instabiles Verhalten liegt vor bei

$$0<k\cdot r<\frac{1-\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}}{\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}}\quad .$$

Desweiteren wirkt $\frac{\partial\Omega}{\partial r}$ stabilisierend und $\frac{\partial\Omega}{\partial z}$ destabilisierend. Nicht verletzt wird dagegen (210), wenn die Störung $k\cdot r$ folgende Bedingungen erfüllt:

$$k\cdot r>\frac{1-\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}}{\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}}\quad ,$$

$$\text{wenn}\qquad\left(\frac{1-\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}}{\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}}\right)^2\gg 4\,\frac{\left|r\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right|}{\left|r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right|}\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\quad ,$$

$$\text{oder}\qquad k\cdot r>\left(\frac{r\frac{\partial\Omega}{\partial z}}{r\frac{\partial\Omega}{\partial r}}\cdot\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\right)^{1/2}\quad ,$$

$$\text{wenn}\qquad\left(\frac{1-\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}}{\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}}\right)^2\ll 4\,\frac{\left|r\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right|}{\left|r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right|}\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z}\quad .$$

Unter Beachtung der obigen Überlegungen habe ich auch für diesen Fall das Stabilitätsverhalten an der elektronischen Rechenmaschine Zuse Z 23 untersucht.
Zunächst wurde dieses Problem mit den gleichen Parametern wie im vorigen Kapitel untersucht, da auch hier schwache differentielle Rotation vorausgesetzt ist, wobei aber zu

beachten war, daß

$$r \frac{\partial \Omega}{\partial z} = - 10^{-15}$$

und

$$\frac{r}{B_\varphi} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = 10.$$

In Erweiterung zu den Parametern des vorigen Kapitels sollen hier zwei verschiedene Dichten, charakterisiert durch

$$P = 10^4; \quad B_\varphi = 10^{10} \cdot \rho$$

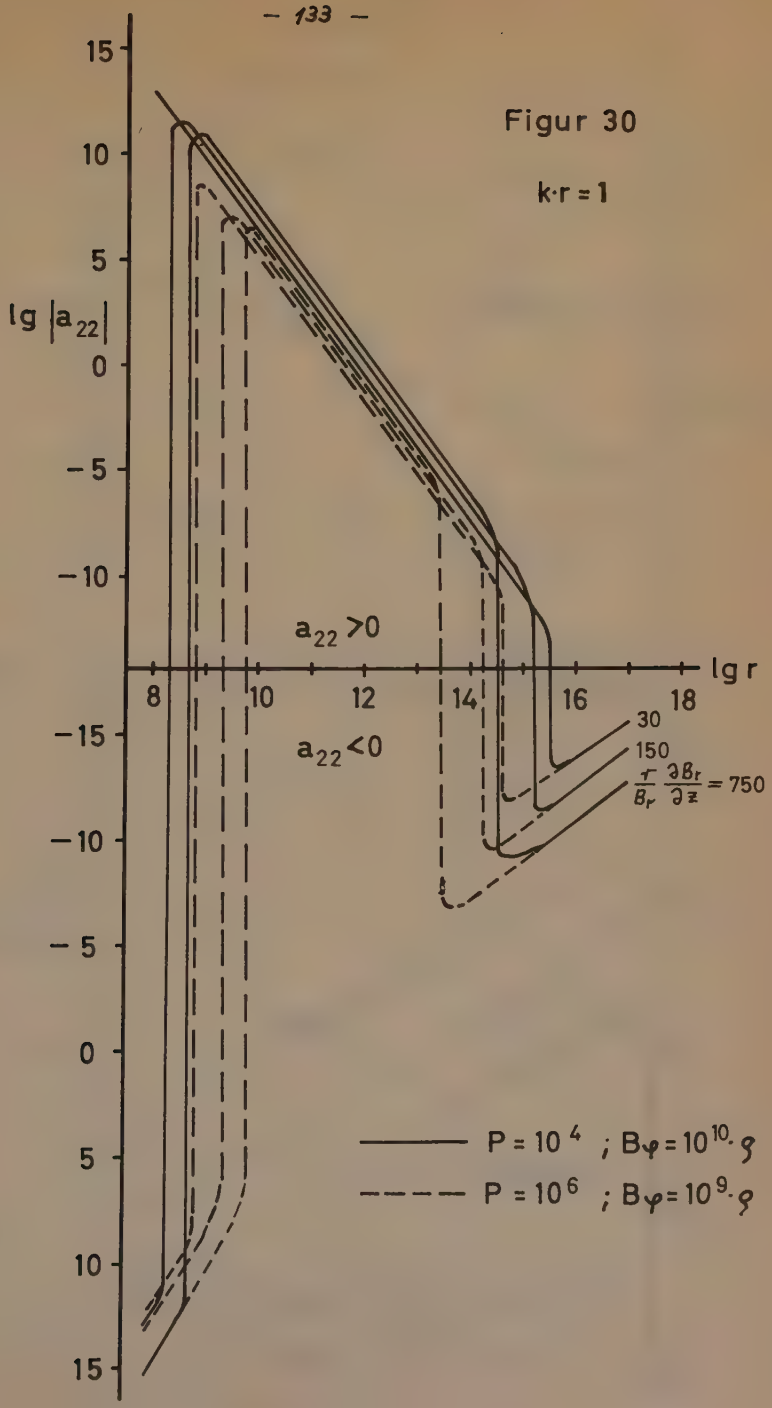
$$P = 10^6; \quad B_\varphi = 10^{9} \cdot \rho \quad ,$$

vorausgesetzt werden.
Die Rechnung ergab, daß für die in diesem Kapitel gemachten Voraussetzungen die Koeffizienten a_{12}, a_{21}, a_{24} und a_{25} praktisch unverändert entsprechend den Figuren 14, 19, 20 und 21 blieben. Gegenüber den Figuren 16 und 17 sind die Koeffizienten a_{13} und a_{14} jetzt aber positiv, verletzen somit nicht mehr die Stabilitätsbedingung (70). Dagegen ist der Koeffizient a_{23} gegenüber der Figur 18 jetzt auch im inneren Kerngebiet negativ. Besonders aufschlußreich erweist sich auch hier wieder der Koeffizient a_{22} (Figur 30). Die Figur 30 unterscheidet sich zunächst praktisch nicht von den Figuren 23 und 24. In beiden Figuren wird lediglich im mittleren Radienbereich die Stabilitätsbedingung (70) nicht verletzt. Von besonderem Interesse ist aber die Vergrößerung des instabilen Bereiches in der Figur 30 im mittleren Radienbereich bei einer Vergrößerung der Dichte. Zusätzlich wird bei einer Vergrößerung der Dichte der Instabilitätsbereich zu kleineren Störungen k·r ausgedehnt (Figur 31). Die obere Grenze dieses Bereiches bleibt dagegen unverändert und wird durch den Verhältnisgradienten von B_r bezüglich z bestimmt.
In der Figur 32 ist die tangentiale magnetische Kraft F_φ dargestellt. Sie ist im gesamten Bereich positiv und wirkt somit verzögernd. Hierdurch wird eine Kontraktion des Plasmas in radialer Richtung begünstigt. Die in der Figur 33 dargestellte Kraftkomponente F_z erweist sich als im gesamten Bereich negativ und wirkt somit kontrahierend.

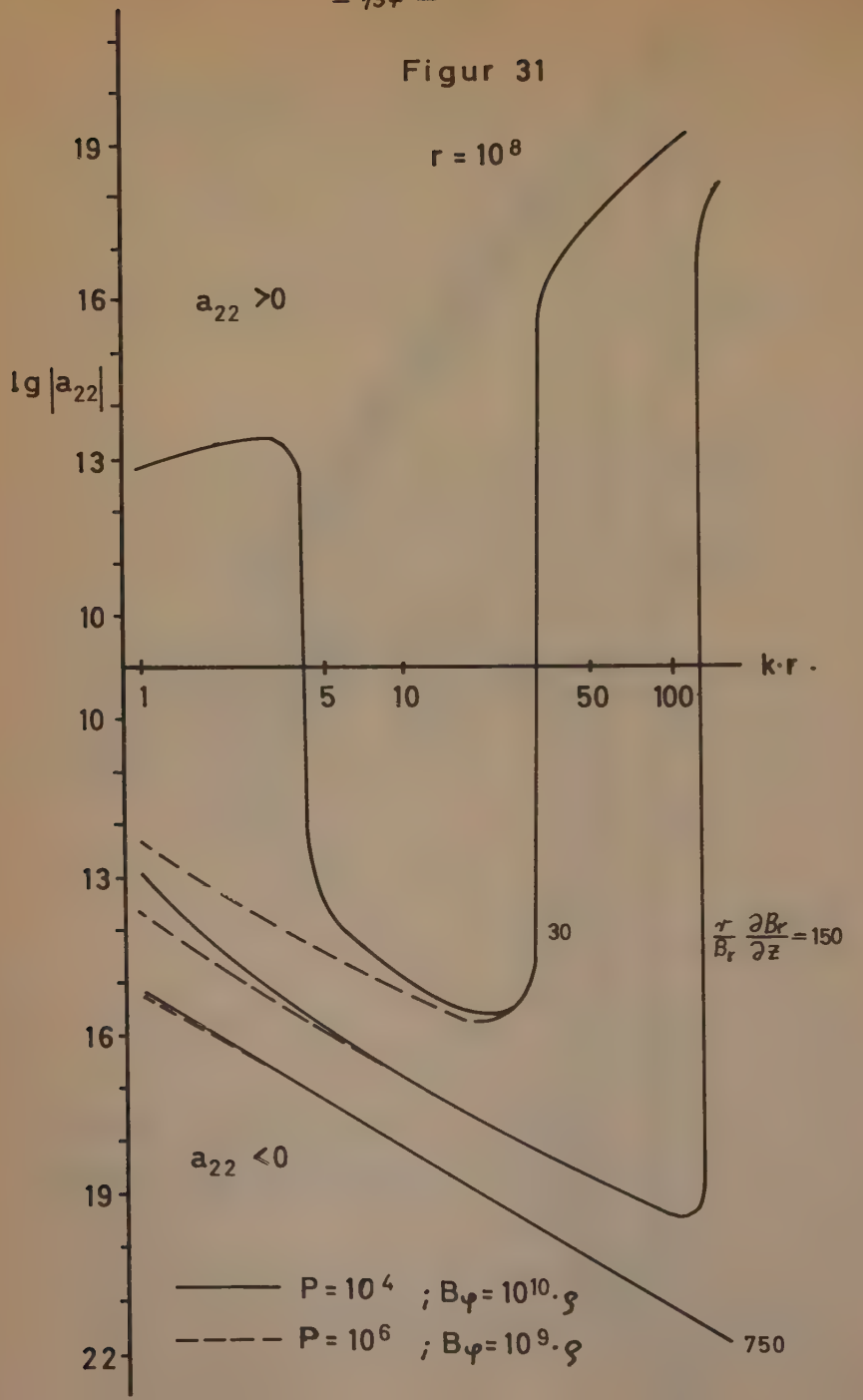
Entsprechend dem insgesamt negativen Verlauf läßt sich der Interpretation des vorigen Kapitels entsprechend, der nunmehr veränderte Verlauf der Koeffizienten a_{14} und a_{23} verstehen. Der im vorigen Kapitel auftretende Vorzeichenwechsel beider Koeffizienten (Figuren 17 und 18) entfällt jetzt; a_{14} bleibt im gesamten Bereich positiv und a_{23} im gesamten Bereich negativ.
Nun Scheint mir aber der zunächst in diesem Kapitel ausgeschlossene Fall

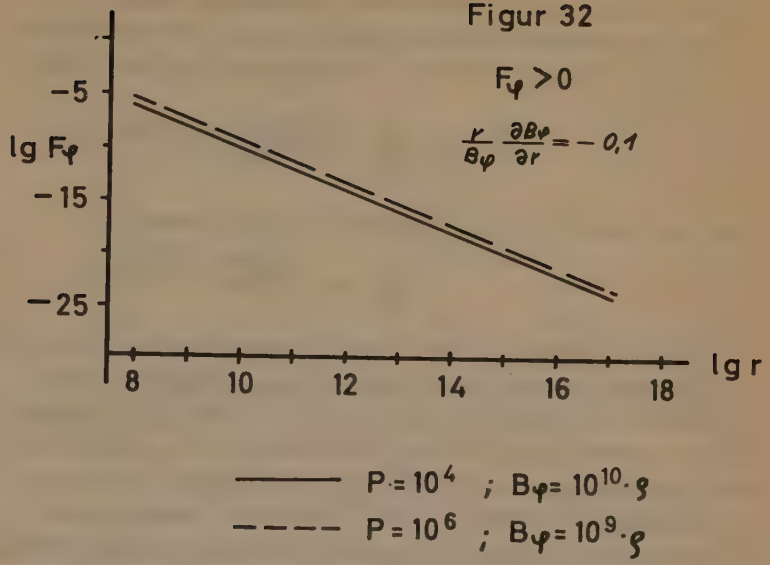
$$\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} < 0$$

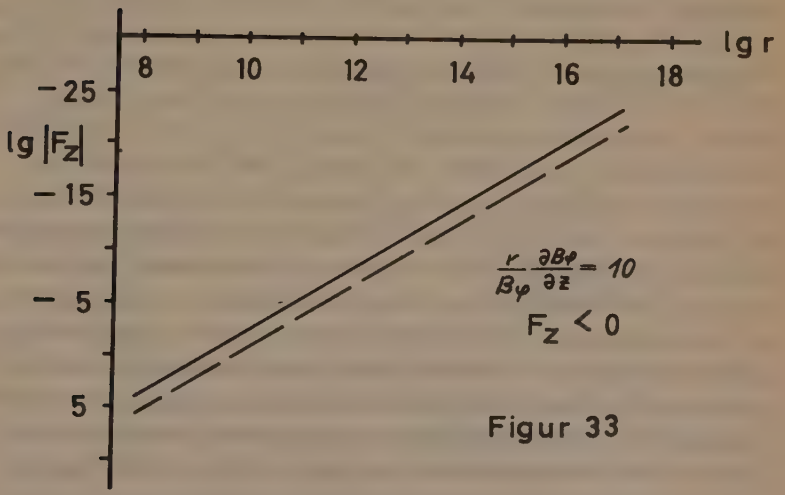
von größerem Interesse zu sein, da, von kleineren räumlichen Bereichen abgesehen, das aufgewickelte tangentiale Magnetfeld in z-Richtung abnehmen sollte. Entsprechend den Bedingungen (198) und (199) ergäbe sich dann aber für F_z (207) ebenfalls der in der Figur 27 dargestellte Verlauf, d.h. in z-Richtung expandierendes inneres Kerngebiet und kontrahierendes Randgebiet.
Im nächsten Kapitel soll noch der Fall einer stärkeren differentiellen Rotation untersucht werden.


Figur 30
k·r = 1
lg |a22|
15
10
5
0
–5
–10
–15
–10
–5
0
5
10
15
a22 > 0
a22 < 0
8
10
12
14
16
18
lg r
30
150
r/Br · ∂Br/∂z = 750
P = 10^4 ; Bφ = 10^10 · ϱ
P = 10^6 ; Bφ = 10^9 · ϱ

Figur 31


r = 10^8
a22 >0
lg |a22|
19
16
13
10
10
13
16
19
22
1
5
10
50
100
k·r
30
r/Br ∂Br/∂z = 150
a22 <0
P = 10^4 ; Bφ = 10^10 · ϱ
P = 10^6 ; Bφ = 10^9 · ϱ
750


Figur 32
$F_\varphi > 0$
$\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} = -0{,}1$
lg F_φ
−5
−15
−25
8
10
12
14
16
18
lg r
P = 10^4 ; $B_\varphi = 10^{10}\cdot\varrho$
P = 10^6 ; $B_\varphi = 10^9\cdot\varrho$


lg r
8
10
12
14
16
18
lg $|F_z|$
−25
−15
− 5
5
$\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = 10$
$F_z < 0$
Figur 33

16. Instabilität bei stark negativ differentiell rotierendem Kern

Im Falle einer fortschreitenden Kontraktion des Kerngebietes verbunden mit einer anwachsenden Rotation wird die differentielle Rotation in z-Richtung größer werden. Für den Fall

$$\left| r \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right| \gg \left| r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right|$$

wurde die Stabilität untersucht mit dem Parameter

$$r \frac{\partial \Omega}{\partial z} = - 10^5 .$$

Die Rechnung ergab für das Stabilitätsverhalten lediglich eine Veränderung der Koeffizienten a_{13} (Figur 34) und a_{23} (Figur 35) gegenüber dem vorigen Kapitel. Bei einer größeren Dichte ($P = 10^6$) ergibt sich für a_{13} (Figur 34) keine Veränderung des Stabilitätsverhaltens. Lediglich bei kleineren Dichten ($P = 10^4$) kann mit anwachsender differentieller Rotation in z-Richtung der vorher stabile Randbereich instabil werden. Für den Koeffizienten a_{23} (Figur 35) ergibt sich bei großer Dichte ebenfalls keine Veränderung des Stabilitätsverhaltens. Bei kleinen Dichten wird hier, gerade umgekehrt zum Verhalten von a_{13}, der vorher instabile Randbereich bezüglich a_{23} die Stabilitätsbedingung (70) nicht mehr verletzen, was natürlich die Instabilität nach a_{13} nicht verhindert. Andererseits ist zu erkennen (Figur 35), daß der stabile Bereich wesentlich tiefer in das Plasmasystem eingreift, und somit dennoch ein räumlich unterschiedliches Verhalten zu erwarten ist. Bei einer starken differentiellen Rotation in z-Richtung kann aber die bisher angenommene Vernachlässigung der z-Komponente des Magnetfeldes nicht mehr als selbstverständlich gelten. Ich möchte daher abschließend noch kurz den Einfluß einer z-Komponente des Magnetfeldes diskutieren.

Für die Komponenten der magnetischen Kräfte ergeben sich bei Berücksichtigung der z-Komponente des Magnetfeldes Zusatzkräfte nach (23), (33)

$$\bar{F}_r = \frac{B_r \cdot B_z}{4\pi \cdot r} \cdot \frac{r}{B_r} \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{B_z^2}{4\pi \cdot r} \cdot \frac{r}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r} \qquad (211)$$

$$\bar{F}_\varphi = \frac{B_\varphi \cdot B_z}{4\pi \cdot r} \frac{r}{B_\varphi} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \qquad (212)$$

$$\bar{F}_z = \frac{B_r \cdot B_z}{4\pi \cdot r} \frac{r}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r} \qquad (213)$$

Für den Verhältnisgradienten von B_z bezüglich r läßt sich der Ansatz machen

$$\frac{r}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r} = f(z) \cdot e^{-\frac{z}{r}} , \qquad (214)$$

womit $\bar{F}_z$ gegenüber F_z (2o7) vernachlässigt werden kann. Entsprechendes gilt für $\bar{F}_r$ gegenüber dem ersten Summanden in (211).
Um für $\bar{F}_r$ und $\bar{F}_\varphi$ einen Vergleich mit F_φ (Figur 32) und F_z (Figur 33) führen zu können, setze ich

$$B_r = B_z = 10^{-4} \text{ Gauß.}$$

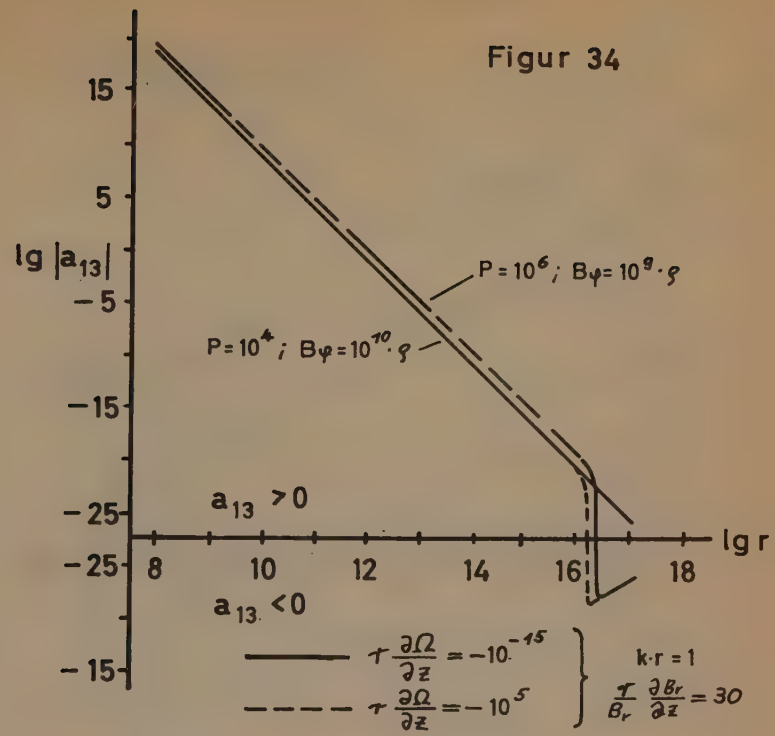
Die sich dann nach (211) und (212) ergebenden Zusatzkräfte sind in den Figuren 36 und 37 dargestellt.
Es erweist sich $\bar{F}_\varphi$ von der gleichen Größenordnung wie F_φ. Die tangentiale Zusatzkraft wirkt somit verstärkt verzögernd auf die Rotation. Neu hinzu kommt aber eine radiale Komponente $\bar{F}_r$, die, da positiv, wiederum einer Kontraktion in r-Richtung entgegenwirkt, die durch die verzögerte Rotation gerade begünstigt wurde. Während ohne $\bar{F}_r$ die Verzögerung der Rotation teilweise, ganz oder überkompensiert werden kann durch die kontrahierende Materie entsprechend dem Drehimpulserhaltungssatz, wird dieser Kompensationsmechanismus durch $\bar{F}_r$ gehemmt. Dies führt zu einem wachsenden $\frac{\partial \Omega}{\partial z}$.

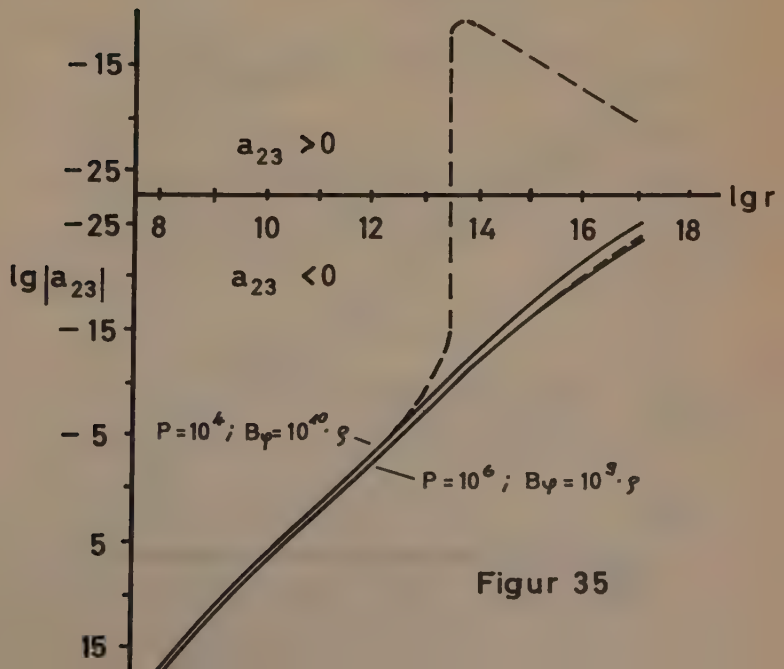
Andererseits wird bei

$$\frac{r}{B_\varphi}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} < 0$$

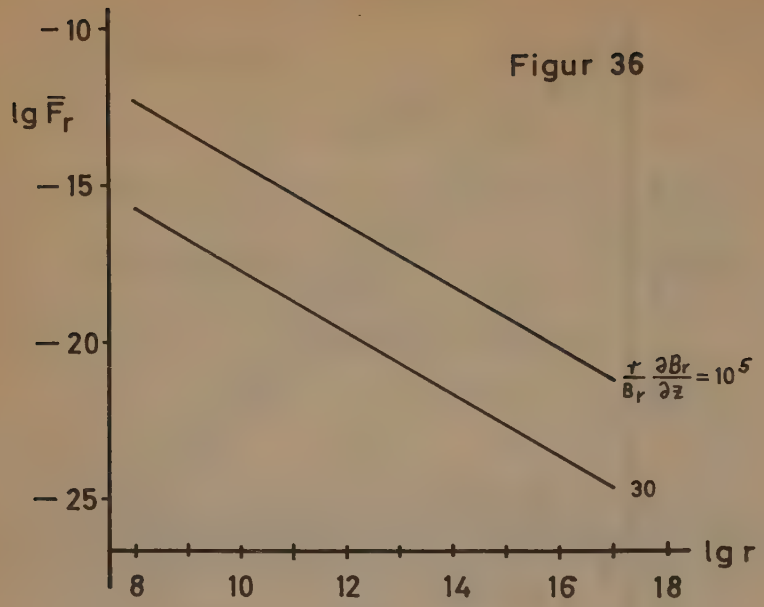
die Rotation durch die tangentiale Zusatzkraft beschleunigt, wobei $\bar{F}_r$ die wachsende Zentrifugalkraft verstärkt. Dies kann zu ringförmigen Strukturen des Plasmasystems führen, wenn man noch eine sicher vorhandene radiale Abhängigkeit der Verhältnisgradienten von B_r und $B\varphi$ bezüglich z beachten würde. Vergleicht man die Figuren 32, 33, 36 und 37, dann zeigt sich auch, daß nur am Rand des Plasmasystems die hier betrachteten Kräfte von der gleichen Größenordnung sind. Im inneren Kern bleibt die z-Komponente der magnetischen Kraft dominierend. Man kann daraus den Schluß ziehen, daß ringförmige Strukturen nur im Randgebiet auftreten können. Dieses Randgebiet neigt im Vergleich zu allen anderen radialen Bereichen auch am ehesten zu stabilem Verhalten. Der innere Kern dagegen verhält sich grundsätzlich instabil bezüglich einer Kontraktion bzw. Expansion in Achsrichtung. In diesem Zusammenhang läßt sich dann auch die in der Figur 1 wiedergegebene Struktur eines extragalaktischen in Achsrichtung expandierenden Plasmasystems verstehen.

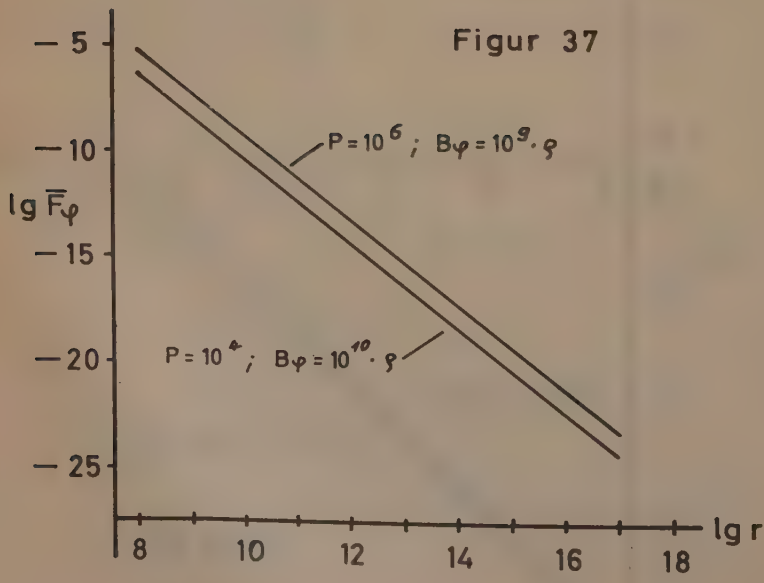
Figur 34





Figur 35


Figur 36
lg $\bar{F}_r$
−10
−15
−20
−25
$\frac{r}{B_r}\frac{\partial B_r}{\partial z} = 10^5$
30
lg r
8
10
12
14
16
18


Figur 37
lg $\bar{F}_\varphi$
−5
−10
−15
−20
−25
$P = 10^6$; $B_\varphi = 10^9 \cdot \varrho$
$P = 10^6$; $B_\varphi = 10^{10} \cdot \varrho$
lg r
8
10
12
14
16
18

Literaturverzeichnis

/ 1/ Sir M. Ryle, M.S. Longair
Monthly Notices, Vol 136, No 2,123 (1967)

/ 2/ J.J.K. Pauliny-Toth, K.J. Kellermann
Astrophysical Journal, Vol 146, No 3,634 (1966)

/ 3/ J.H. Piddington
Monthly Notices, Vol 128, No 4,345 (1964)

/ 4/ J.H. Piddington
Monthly Notices, Vol 133, No 2,163 (1966)

/ 5/ J.H. Piddington
Monthly Notices, Vol 136, No 2,165 (1967)

/ 6/ I.D. Novikov, Ya.B. Zeldovič
Annual Review of Astronomy and Astrophysics
Vol 5,627 (1967)

/ 7/ Ya.B. Zeldovich
Soviet Physics Uspekhi, Vol 6, No 4,475 (1964)

/ 8/ P.J.E. Peebles
Astrophysical Journal, Vol 142, No 4,1317 (1965)

/ 9/ W.C. Saslaw
Monthly Notices, Vol 136, No 1,39 (1967)

/10/ K.S. Thorne
Astrophysical Journal, No 1, Part 1,51 (1967)

/11/ A. Unsöld
Physik der Sternatmosphären
Springer-Verlag (1955)

/12/ H. Alfvén
Kosmologie und Antimaterie
Umschau Verlag

/13/ H. Alfvén
Reviews of Modern Physics, Vol 37, No 4,652 (1965)

/14/ H. Alfvén, C.-G. Fälthammar
Cosmical Electrodynamics
Oxford (1963)

/15/ J.G. Linhardt
Plasma Physics
North-Holland Publishing Company

/16/ G. Ludwig
Fortschritte der Projektiven Relativitätstheorie
Vieweg, Braunschweig (1951)

/17/ P. Jordan
Schwerkraft und Weltall
Vieweg, Braunschweig (1955)

/18/ P. Jordan
Die Bedeutung der Diracschen Hypothese für die Geophysik
Akademie der Wissenschaften, Wiesbaden (1959)

/19/ W. Hahn
Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov
Springer Verlag (1959)

/20/ Sir J. Jeans
Astronomy and Cosmogony
Dover Publication, New York (1961)

/21/ P.A. Strittmatter
Monthly Notices Vol 131, No 4,491 (1966)

/22/ P.A. Strittmatter
Monthly Notices, Vol 132, No 3,359 (1966)

/23/ T.T. Arny
Annales d'Astrophysique, Vol 30, No 1,1 (1967)

/24/ J.L. Tassoul
Monthly Notices, Vol 137, No 1,1 (1967)

/25/ M.V. Vyazovskii
Soviet Astronomy, Vol 6, No 4,580 (1963)

/26/ Yu.V. Vandakurov, E.N. Kolesnikova
Soviet Astronomy, Vol 10, No 1,78 (1966)

/27/ P. Verma, Y.K. Verma
Annales d'Astrophysique, Vol 28, No 2,357 (1965)

/28/ R. Ebert
Zeitschrift für Naturforschung, Vol 22 a, 431 (1967)

/29/ G. Stephanson
Monthly Notices, Vol 122, No 5,455 (1961)

/30/ D. Lynden-Bell, J.P. Ostriker
Monthly Notices, Vol 136, No 3,293 (1967)

/31/ G.L. Kalra, S.P. Talwar
Annales d'Astrophysique, Vol 30, No 3,371 (1967)

/32/ S.S. Rao, G.L. Kalra
Canadian Journal of Physics, Vol 45,2779 (1967)

/33/ M.N. Maksumov
Soviet Astronomy, Vol 11, No 1,79 (1967)

/34/ L.S. Marochnik
Soviet Astronomy, Vol 10, No 5,738 (1967)

/35/ A.V. Getling
Soviet Astronomy, Vol 9, No 3,451 (1965)

/36/ P. Frank, R.v. Mises
Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Teil I
Dover Publications (1961)

/37/ A. Einstein
Grundzüge der Relativitätstheorie
Vieweg, Braunschweig (1963)

/38/ A.A. Friedmann
Zeitschrift für Physik, Vol 10, No 6,377 (1922)

/39/ H. Vogt
Außergalaktische Sternsysteme und Struktur der Welt im Großen
Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig (1960)

/40/ L. Witten
Gravitation
John Wiley & Sons, New York - London (1962)

/41/ A. Trautman
Lectures on General Relativity
Brandeis Summer Institute, Vol I (1964)

/42/ L.D. Landau, E.M. Lifschiz
Lehrbuch der Theoretischen Physik, Vol II, Feldtheorie
Akademie-Verlag, Berlin (1963)

/43/ M.v. Laue
Die Relativitätstheorie, 2. Band
Vieweg, Braunschweig (1965)

/44/ V.A. Fock
Theorien von Raum, Zeit und Gravitation
Akademie-Verlag, Berlin (1960)

/45/ V.A. Fock
Soviet Physics Uspekhi, Vol 6, No 4,473 (1964)

/46/ Ya.B. Zeldovich
Soviet Physics - JETP, Vol 14,1143 (1962)

/47/ W. Albring
Angewandte Strömungslehre
Verlag Th. Steinkopff, Dresden (1966)

/48/ L.E. Kalikhman
Elements of Magnetohydrodynamics
W.B. Saunders Company, London (1967)

/49/ P. Frank, R.V. Mises
Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Teil II
Dover Publications (1961)

/50/ W. Rehwald
Elementare Einführung in die Bessel- Neumann- und Hankel-Funktionen
S. Hirzel Verlag, Stuttgart (1959)

/51/ G. Randers
Astrophysical Journal, Vol 95,454 (1942)

Mein Lebenslauf

3. 8. 1936 Geboren in Friedeberg/Neumark. Meine Mutter hieß Gerda Zegenhagen, geb. Landmesser. Sie starb 1945. Mein Vater hieß Alfred Zegenhagen. Er war kaufmännischer Angestellter und starb 1941.

1. 9. 1942 Beginn der Schulausbildung an der 3. Volksschule in Berlin. Ab 1943 Schulbesuch in Friedeberg/Neumark. 1945 Aufenthalt in der Tschechoslowakei. Danach Schulbesuch in Wersche bei Osnabrück und in Bad Rothenfelde. Abschluß der Schulausbildung in der 9. Klasse der 13. Schule des Bezirkes Tiergarten in Berlin im März 1951.

1. 4. 1951 Beginn der Ausbildung als Mechaniker bei den Blaupunkt - Werken, Berlin. Infolge innerbetrieblicher Umstellung Fortsetzung der Lehre im Dezember 1952 als Elektromechaniker bei der Robert Bosch GmbH, Berlin. Facharbeiterprüfung als Elektromechaniker im September 1954. Während der Lehrzeit Besuch eines Aufbaulehrganges und Erwerb der Fachschulreife.

1. 10. 1954 Tätigkeit als Elektromechaniker bei der Robert Bosch GmbH, Berlin bis zum Februar 1955.

15. 3. 1955 Studium an der Ingenieurschule Gauß, Berlin in der Fachrichtung Elektrotechnik. Während dieses Studiums in den Semesterferien Beschäftigungen bei der IBM Deutschland in Sindelfingen und Berlin (Teilgerätekonstruktion), bei der Robert Bosch GmbH, Stuttgart (Auswertung von Arbeits- und Zeitstudien) und bei der AEG, Berlin (Meßgerätekonstruktion). Im Februar 1958 Ingenieurprüfung in der Fachrichtung Elektrotechnik. Erwerb der Hochschulreife.

16. 6. 1958 Entwicklungsingenieur bei der Telefunken GmbH, Backnang bei der Richtfunkentwicklung im Labor für Mikrowellensender bis zum Oktober 1959.

6. 10. 1959 Studium an der Freien Universität Berlin in der Fachrichtung Physik. Die Vorprüfung zur Diplomprüfung habe ich im November 1962 abgelegt. Während der Semesterferien (Frühjahr 1960, Herbst 1960, Frühjahr 1961, Herbst 1961 und Frühjahr 1963) Beschäftigung als Entwicklungsingenieur im Fachgebiet Richtfunk bei der Telefunken GmbH, Backnang.

1. 5. 1963 Tutor im Studentendorf Schlachtensee (Philosophisch - Naturwissenschaftlicher Arbeitskreis) bis zum Juni 1964.

1. 10. 1963 Beginn der Beschäftigung als nv.-Dozent für Physik und Mathematik an der Techniker-Abendschule der Staatlichen Ingenieurschule Gauß, Berlin. Diese Tätigkeit übe ich jetzt noch aus.

16. 10. 1965 Beschäftigung als wissenschaftlicher Hilfsassistent am 1. Mathematischen Institut bis zum September 1966.

15. 2. 1966 Diplomprüfung in Physik mit dem Nebenfach Mathematik. Meine akademischen Lehrer waren in Experimentalphysik Herr Professor Honerjäger und Herr Professor Lassen, in Theoretischer Physik Herr Professor Grawert, Herr Professor Ludwig, Herr Professor Päsler und Herr Professor Theis, in Mathematik Herr Professor Dinghas, Herr Professor Grotemeyer und Herr Professor Ringel. Desweiteren besuchte ich die Vorlesungen in Astronomie und Theoretischer Astrophysik von Herrn Professor Hinderer und in Chemie die Vorlesungen und Übungen von Herrn Professor Jahr, Herrn Professor Manecke und Herrn Professor Schenck.

1. 10. 1966 Wissenschaftlicher Assistent am 1. Mathematischen Institut, Abteilung Theoretische Astronomie und Himmelsmechanik. Besuch der Vorlesungen in Theoretischer Meteorologie bei Herrn Professor Fortak. Beginn dieser Doktorarbeit bei Herrn Professor Hinderer.